トレーブ

位相ベクトル空間
超関数・核

（下）

松浦重武訳

数学叢書

25

吉岡書店

TOPOLOGICAL VECTOR
SPACES, DISTRIBUTIONS
AND KERNELS
by
F. Treves

目　次

――下 巻――

25. [転置写像の例] 緩増大超関数の Fourier 変換 ・・・・・・・・・ 329
26. 関数の合成積 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 343
27. [転置写像の例] 超関数の合成積 ・・・・・・・・・・・・・・ 350
28. 切り落しと正則化による超関数の近似・・・・・・・・・・・・ 368
29. コンパクトな台をもつ超関数の Fourier 変換 Paley-Wiener の定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 377
30. 合成積と乗法積の Fourier 変換・・・・・・・・・・・・・・・ 388
31. Sobolev 空間 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 397
32. 線形写像の同等連続集合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 413
33. 樽式空間 Banach-Steinhaus の定理・・・・・・・・・・・・・ 427
34. Banach-Steinhaus の定理の応用 ・・・・・・・・・・・・・・ 433
    34.1. Hilbert 空間への応用・・・・・・・・・・・・・・・・・ 433
    34.2. 積空間における分離連続関数への応用・・・・・・・・・・・ 434
    34.3. $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ の完備部分集合 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 437
    34.4. Montel 空間の双対 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 440
35. 弱位相のさらに進んだ考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 445
36. 双対性に整合する諸位相, Mackey の定理, 回帰性・・・・・ 457
    ノルム空間 E_B ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 460
    半回帰的空間および回帰的空間の例・・・・・・・・・・・・・ 465
37. Fréchet 空間における全射・・・・・・・・・・・・・・・・・ 470
    定理 37.1 の証明 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 471
    定理 37.2 の証明 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 477
38. Fréchet 空間における全射 (続き) とその応用 ・・・・・・・・ 481
    定理 37.3 の証明 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 481
    定理 37.2 の応用 : E. Borel の定理・・・・・・・・・・・・・ 485
    定理 37.3 の応用 : 偏微分方程式の $\mathcal{C}^\infty$ の存在定理・・・・・・・・・ 486

第III部　テンソル積．核

39.　ベクトル空間のテンソル積 …… 500
40.　位相ベクトル空間に値をもつ可微分関数，超関数のテンソル積 …… 511
41.　双線形写像．準連続性 …… 522
　定理 41.1 の証明 …… 523
42.　双線形形式の空間．線形写像の空間およびテンソル積との関係 …… 531
43.　テンソル積上の二つの主な位相．位相テンソル積の完備化 …… 541
44.　位相テンソル積の完備化の例：積 ε …… 557
　例 44.1.　局所凸 Hausdorff 空間 E に値をもつ $\mathcal{C}^m$ 関数の空間 $\mathcal{C}^m(X; E)$ $(0\leqslant m\leqslant +\infty)$ …… 557
　例 44.2.　局所凸 Hausdorff 空間における総和可能列 …… 563
45.　位相テンソル積の完備化の例：Fréchet 空間の完備 π-積 …… 574
46.　位相テンソル積の完備化の例：空間 L^1 との完備 π-積 …… 584
　46.1.　空間 $L^\alpha(E)$ …… 585
　46.2.　Dunford-Pettis の定理 …… 587
　46.3.　$L^1 \otimes_\pi E$ への応用 …… 592
47.　核型写像 …… 597
　例．Banach 空間から L^1 への核型写像 …… 609
48.　Hilbert 空間における核型作用素 …… 610
49.　$E \otimes_\varepsilon F$ の双対．積分型写像 …… 626
50.　核型空間 …… 637
　命題 50.1 の証明 …… 646
51.　核型空間の例．核定理 …… 659
52.　応　用 …… 670
付録：Borel グラフ定理 …… 688
文献表 …… 701
訳者あとがき …… 702
記号索引
事項索引

【上巻主要内容】

第I部　位相ベクトル空間・関数空間

1. フィルター，位相空間，連続写像
2. ベクトル空間，線形写像
3. 位相ベクトル空間の定義
4. Hausdorff 位相ベクトル空間，商位相ベクトル空間，連続線形写像
5. Cauchy フィルター，完備な集合，完備化
6. コンパクト集合
7. 局所凸空間，セミノルム
8. 距離付け可能な位相ベクトル空間
9. 有限次元 Hausdorff 位相ベクトル空間，有限余次元部分ベクトル空間，超平面
10. Fréchet 空間，例
11. 可ノルム空間，Banach 空間，例
12. Hilbert 空間
13. *LE*-空間，例
14. 有界集合
15. 関数空間における近似の手法
16. 1の分割
17. 開写像定理

第II部　双対性・超関数の諸空間

18. Hahn-Banach の定理
19. 双対空間上の種々の位相
20. 双対空間の例，L^p 空間
21. Radon 測度，超関数
22. 多項式と形式的巾級数．解析的汎関数
23. 連続線形写像の転置
24. 超関数の台と構造

下巻に現われる人名

Baire	ベール
Banach	バナッハ
Borel	ボレル
Bourbaki	ブールバキ
Cauchy	コーシー
Dirac	ディラック
Diximier	ディクシミエ
Dunford	ダンフォード
Fisher	フィッシャー
Fourier	フーリエ
Fréchet	フレッシェ
Fredholm	フレードホルム
Fubini	フビニ
Grothendieck	グロタンディエック
Hahn	ハーン
Hausdorff	ハウスドルフ
Heaviside	ヘビサイド
Hilbert	ヒルベルト
Hölder	ヘルダー
Hörmander	ヘルマンダー
Kronecker	クロネッカー
Laplace	ラプラス
Lebesgue	ルベーグ
Leibniz	ライプニッツ
Mackey	マッキー
Malgrange	マルグランジュ
Martineau	マルチノー
Montel	モンテル
Osgood	オスグッド
Paley	パレー
Parseval	パーセバル
Pettis	ペティス
Plancherel	プランシュレル, プランケレル
Radon	ラドン
Raikov	ライコフ
Riemann	リーマン
Riesz	リース
Schatten	シャッテン
Schwartz	シュバルツ
Schwarz	シュバルツ
Šmulian	シュムリアン
Sobolev	ソボレフ
Souslin	スースリン
Steinhaus	シュタインハウス
Taylor	テイラー
Tychonoff	チコノフ
Wiener	ウィーナー

25.

[転置写像の例]
緩増大超関数の Fourier 変換

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の点はいつものように x で表わす．$\mathbf{R}^n$ の一つの基底 $(e_1,\dots,e_n)$ を定めたとき，この基底に関する座標を $x_j\,(1\leqslant j\leqslant n)$ として $x=(x_1,\dots,x_n)$ と書く [1]．$\mathbf{R}^n$ の双対を $\mathbf{R}_n$ と書く．$\mathbf{R}_n$ の元はギリシャ文字を用いて ξ,η などと書く．線形形式 ξ の点 x における値を $\langle\xi,x\rangle$ または $\langle x,\xi\rangle$ と書く．$\mathbf{R}^n$ の基底 $(e_1,\dots,e_n)$ の**双対基底** (dual basis) とは $\mathbf{R}_n$ の基底 $(e_1',\dots,e_n')$ であって，方程式

$$\langle e_j',e_k\rangle=\begin{cases}1 & (j=k)\\ 0 & (j\neq k)\end{cases}$$

によって定まるもののことである．$\xi\in\mathbf{R}_n$ のこの基底に関する座標を $\xi_1,\dots,\xi_n$ とすれば

$$\langle x,\xi\rangle=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$$

が成り立つ．

$\mathbf{R}^n$ の Lebesgue 測度を用いるが，それを dx で表わす．読者の注意すべきことは，Lebesgue 測度は定数因子を除いてしか定まらないことである [2]．そのような測度を一つをえらんだとしよう．たとえば $\mathbf{R}^n$ の一つの基底 $(e_1,\dots,e_n)$ を定めて，その基底に関する (超) **立方体** (hypercube) $\{x\,;\,0\leqslant x_j\leqslant 1,\ j=1,\dots,n\}$ の測度が 1 に等しいように定めたとする．こうすれば $\mathbf{R}_n$ の Lebesgue

---

1) $\mathbf{R}^n$ を実数体 $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間の記号と思って読めばよい．

2) この意味は，$\mathbf{R}^n$ 上の測度でコンパクト集合では有限になり開集合 $(\neq\emptyset)$ では正になる平行移動で不変な測度 (これを Haar 測度という) が定数因子を除いて一意的に定まることをいっている．慣れない読者は気にしないで先へ進むとよい．

測度 $d\xi$ もただちに定められる．それは，双対基底をとってそれに関する立方体 $\{\xi\,;\,0\leqslant\xi_j\leqslant 1,\ j=1,\ldots,n\}$ の測度を1として定めるのである．$\mathbf{R}^n$ の基底の変換を行なったとし，$y_1,\ldots,y_n$ を新基底に関する座標として Lebesgue 測度 dy を立方体 $\{y\,;\,0\leqslant y_j\leqslant 1,\ j=1,\ldots,n\}$ の測度が1になるように定めたとすれば，ある正数 t について $dy=t\,dx$ となる．このとき，新基底の双対基底に関する $\mathbf{R}_n$ の点の座標を $\eta_1,\ldots,\eta_n$ とすれば，$d\eta=t\,d\xi$ となることが容易に検証できる[1]．

さて，空間 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ の定義を思い出そう．それは $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数 φ であって，任意の二つの複素係数の n 変数多項式 $P,\ Q$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|P(x)Q(\partial/\partial x)\varphi(x)|<+\infty$$

となるもの全体のなす空間である．$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ の位相は [$P,\ Q$ が動くときの] セミノルムの族

$$\varphi\mapsto\sup_x|P(x)Q(\partial/\partial x)\varphi(x)|$$

によって定義される．$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ は Fréchet 空間であって，その任意の閉有界集合はコンパクトになる (10 章，例 IV および定理 14.5 参照)．容易にわかるように，位相ベクトル空間 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ の定義は $\mathbf{R}^n$ の基底のえらび方に関係しない．

さて，$\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ とすれば，任意の $\xi\in\mathbf{R}_n$ に対して

$$\exp(-2i\pi\langle x,\ \xi\rangle)\varphi(x)$$

は x の関数として明らかに $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ に属する．このような関数は無限遠で非常に速く減少するから，その絶対値の積分，すなわち $\int|\varphi(x)|dx$ はつねに有限である．

定義 25.1. $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ の **Fourier 変換** (Fourier transform) とは，$\xi\in\mathbf{R}_n$ の関数

$$\int\exp(-2i\pi\langle x,\ \xi\rangle)\varphi(x)\,dx$$

---

1) n 重積分の変数変換の公式を用いるとよい．

のことをいう．これを $\mathscr{F}\varphi(\xi)$ と書く[1]．誤解のおそれがなければ，これを $\hat{\varphi}(\xi)$ とも書く．

Fourier 変換はしばしば，積分

$$\int \exp(-i\langle x,\ \xi\rangle)\varphi(x)\,dx$$

に等しいとして定義される．Schwartz にしたがって指数に因子 2π を入れたのは逆変換の計算の際に表われる因子 2π をさけるためである．

定理 25.1. Fourier 変換は $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ の上への（位相ベクトル空間構造に関する）同形写像である．この逆写像は，写像

$$\bar{\mathscr{F}} : \mathscr{S}(\mathbf{R}_n) \ni \psi \mapsto \int \exp(2i\pi\langle x,\ \xi\rangle)\psi(\xi)\,d\xi$$

である．

ここで Lebesgue 測度 $d\xi$ は（前に述べた仕方で）標準的に dx と結びつけられたものとする．

定理 25.1 の証明 (1)《Fourier 変換が $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ への連続線形写像になること》．

まず，任意の二つの多項式 $P, Q \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ に対し

$$Q(\partial/\partial\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \int \exp(-2i\pi\langle x,\ \xi\rangle)Q(-2i\pi x)\varphi(x)\,dx,$$

$$P(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \int \exp(-2i\pi\langle x,\ \xi\rangle)P((2i\pi)^{-1}\partial/\partial x)\varphi(x)\,dx$$

が成り立つ．第一の式は積分記号下の微分の Leibniz の法則から明らかである（φ と任意の多項式の積が無限遠で‘非常に’速く減少することに注意すればよい）．第二の式は右辺の積分において部分積分を実行してみればわかる．この二つの公式を結び合せれば

$$P(\xi)Q(\partial/\partial\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \int \exp(-2i\pi\langle x,\ \xi\rangle)P((2i\pi)^{-1}\partial/\partial x)[Q(-2i\pi x)\varphi(x)]\,dx$$

1) 正確には $(\mathscr{F}\varphi)(\xi)$ と書くべきもの．

を得るから，すべての $\xi \in \mathbf{R}_n$ について

$$|P(\xi)Q(\partial/\partial\xi)\hat{\varphi}(\xi)| \leqslant \int |P((2i\pi)^{-1}\partial/\partial x)[Q(-2i\pi x)\varphi(x)]|dx$$

$$\leqslant \left\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}(1+|x|)^{n+1}|P((2i\pi)^{-1}\partial/\partial x)[Q(-2i\pi x)\phi(x)]\right\}\int(1+|x|)^{-n-1}dx$$

が成り立つ．この不等式からただちにわれわれの主張：$\mathscr{F}$ は $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ への連続写像となることがわかる．

(2) 《$\bar{\mathscr{F}}$ は $\mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ から $\mathscr{S}(\mathbf{R})^n$ への連続線形写像である》．

これは $\bar{\mathscr{F}}$ が $\mathscr{F}$ と比べて指数の符号が反対になっているだけだから明らかである．

(3) 《$\bar{\mathscr{F}}$ は $\mathscr{F}$ の逆写像である》．

この (3) が証明できれば定理は証明されたことになる．なぜなら，たがいに逆写像になっている二つの線形連続写像だからである．さて，証明すべきことは次の二つの等式である．

$$\bar{\mathscr{F}}\mathscr{F} = \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \text{ の恒等写像}, \qquad \mathscr{F}\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{S}(\mathbf{R}_n) \text{ の恒等写像}.$$

$\mathscr{F}$ と $\bar{\mathscr{F}}$ の定義の対称性から，これらの二つの等式のうちで [たとえば] 最初の方を証明すれば十分である．

f を $\mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ に属する一つの関数とすれば，

$$\int f(\xi)\hat{\phi}(\xi)\exp(2i\pi\langle x, \xi\rangle)d\xi = \iint f(\xi)\phi(y)\exp(2i\pi\langle x-y, \xi\rangle)dy\,d\xi$$

$$= \int \phi(y)\bar{\mathscr{F}}f(x-y)dy$$

$$= \int \phi(x-y)\bar{\mathscr{F}}f(y)dy.$$

上の二重積分において積分順序の変更が許されたのは，関数 $(y, \xi)\mapsto\phi(y)f(\xi)$ が $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_n$ において Lebesgue 可積分だからである．結局，次式を得た

$$\int f(\xi)\hat{\phi}(\xi)\exp(2i\pi\langle x, \xi\rangle)d\xi = \int \phi(x-y)\bar{\mathscr{F}}f(y)dy. \tag{25.1}$$

さて，証明を完成させるために，$f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ が任意だったことを用いて f を変えて，ξ の関数として $\mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ に属しながら $\mathbf{R}_n$ 上で恒等的に 1 に等しい関数

に —— たとえば $L^2(\mathbf{R}_n)$ の弱収束の意味で —— 収束し，他方 $\overline{\mathscr{F}}f$ は $\mathscr{S}$ の双対 $\mathscr{S}'$ において原点における Dirac 測度に収束するような関数列にとる（後に述べることを少々先取りして $\mathscr{S}'$ を超関数からなる一つの空間とみなす）．そのような関数列を見つけるのは容易である．たとえば次の関数列をとればよい

$$e^{-|\xi|^2/k},\quad k=1,2,\ldots\quad \text{(後の演習問題 25.1 参照)}$$

（証終）．

定理 25.2. (Plancherel–Parseval の定理)

ϕ, ψ を $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ に属する任意の二つの関数としたとき，

$$\int \phi(x)\overline{\psi(x)}\,dx = \int \hat{\phi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}\,d\xi \tag{25.2}$$

$$\int |\phi(x)|^2\,dx = \int |\hat{\phi}(\xi)|^2\,d\xi \tag{25.3}$$

が成り立つ．((25.2) の ‾ は複素共役を表わす)．

証　明　等式 (25.1) において $x=0$ とおき，右辺の積分で変数変換 $y\mapsto -y$ を行なえば

$$\int \hat{\phi}(\xi)f(\xi)\,d\xi = \int \phi(y)\overline{\mathscr{F}}f(-y)\,dy$$

となる．そこで f を $\overline{\mathscr{F}}f(-y)=\overline{\psi(y)}$ となるようにえらぶ．それは定理 25.1 により可能である．このようにすれば，$f(\xi)=\overline{\hat{\psi}(\xi)}$ となることを検証するのはなんでもない．

系 1. Fourier 変換 $\mathscr{F}:\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ は $L^2(\mathbf{R}^n)$ から $L^2(\mathbf{R}_n)$ の上への等距離写像に拡張することができる．

$\mathscr{S}$ は $\mathscr{C}_c^\infty$ を含むから $L^2(\mathbf{R}^n)$ で稠密である（定理 15.4 の系 3）．したがって系 1 は (25.3) からただちに従う．

記号 25.1. $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ における Fourier 変換を拡張した $L^2(\mathbf{R}^n)$ から $L^2(\mathbf{R}_n)$ への等距離写像も $\mathscr{F}$ で示す．その逆の等距離写像を $\overline{\mathscr{F}}$ で示す．

これらの等距離写像はそれぞれ L^2 における Fourier 変換および逆 Fourier 変換とよばれる．

系 2. u, v を $L^2(\mathbf{R}^n)$ の任意の二元とするとき，

(25.4)　$$(u|v)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = (\mathscr{F}u|\mathscr{F}v)_{L^2(\mathbf{R}_n)}$$　(Parseval の公式)

(25.5)　$$\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|\mathscr{F}u\|_{L^2(\mathbf{R}_n)}$$　(Plancherel の公式)

が成り立つ．

ここで (|) は L^2 の内積であり，‖　‖はノルムである．(25.4) および (25.5) はそれぞれ (25.2) および (25.3) から連続性によって出る．もちろん (25.5) は本質的には系 1 のいい直しであり，(25.4) と (25.5) は極表示[1] から同値である．

演 習 問 題

25.1. 関数 $x \mapsto e^{-|x|^2/k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ の Fourier 変換を計算せよ．

25.2. $\varepsilon > 0$ を任意として，関数 $x \mapsto \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ の Fourier 変換は関数 $\xi \mapsto \hat{\varphi}(\varepsilon\xi)$ に等しいことを証明せよ．このことを利用して，$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ において Dirac 測度に収束し，その Fourier 変換が $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}_n)$ において関数 1 に収束するように $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ の関数列を構成せよ．

25.3. $\mathscr{C}_\infty(\mathbf{R}_n)$ を $\mathbf{R}_n$ 上の複素数値連続関数で無限遠で 0 に収束するもの全体に，$\mathbf{R}_n$ の全空間上の一様収束のノルム

$$\phi \mapsto \sup_{\xi \in \mathbf{R}_n} |\varphi(\xi)|$$

を入れたものとする．$\mathscr{C}_\infty(\mathbf{R}_n)$ は Banach 空間になることを証明せよ．ついで，次の (重要な) Lebesgue の定理を証明せよ．

定理 25.3. Fourier 変換 $\mathscr{F}: \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ は，$L^1(\mathbf{R}^n)$ から $\mathscr{C}_\infty(\mathbf{R}_n)$ への一対一の連続線形写像に拡張することができる．

25.4. Fourier 変換 $\mathscr{F}$ を $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ から $L^1(\mathbf{R}^n)$ にまで拡張したものは，$L^1(\mathbf{R}^n)$ から $\mathscr{C}_\infty(\mathbf{R}_n)$ への連続線形写像として，上への写像でもなければ同形写像でもないことを証明

---

1) polarization. ノルムを用いて内積を表わす公式 (上巻 142 頁参照).

せよ．

さて，Fourier 変換を $\mathscr{S}$ の双対 $\mathscr{S}'$ において定義することに進む．その前に，$\mathscr{S}'$ はコンパクトな台をもつ超関数の空間 $\mathscr{E}'$ とすべての超関数の空間 $\mathscr{D}'$ の中間にあるような，$\mathbf{R}^n$ 上の一つの超関数の空間になることを示そう（ここで考察する関数および超関数はすべて $\mathbf{R}^n$ 全体で定義されているから，$(\mathbf{R}^n)$ を省略して書くことにする）．同時に，$\mathscr{S}'$ の元の（超関数と見たときの）特徴づけもあたえる．

次の図式を考えよう．

$$\mathscr{C}_c^\infty \to \mathscr{S} \to \mathscr{C}^\infty$$

ここで矢印は自然な単射［埋め込み写像］を表わす．これらの単射は，考えている三つの空間の位相の定義によって，共に連続線形写像であり，さらに稠密な像をもっている（定理 15.4 の系，定理 15.5）．したがって，この図式を転置することによって得られる新図式

$$\mathscr{E}' \to \mathscr{S}' \to \mathscr{D}'$$

において，写像は共に連続線形単射となる．このことから，$\mathscr{S}$ の双対 $\mathscr{S}'$ は $\mathbf{R}^n$ 上の超関数の空間（$\mathscr{E}'$ を含むような）と見なすことができる．これが示すべきことであった．

定義 25.2. $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ に属する超関数のことを**緩増大超関数** (tempered distribution または temperate distribution)[1] という．

形容詞‘緩増大’の由来は，$\mathscr{S}'$ に属する超関数に関する次の構造定理にある（これからまず，緩増大超関数はすべて有限位数であることがわかる）．

定理 25.4. $\mathbf{R}^n$ 上の超関数が緩増大であるための必要十分条件は，それが無限遠において適当な多項式よりもおそく増大するような連続関数の導関数の有限和に等しいことである．

1) または slowly increasing distribution.

証　明　証明は，前章において $\mathscr{D}'^F$ に関連した種々の構造定理を証明した際の議論と非常に類似しているが，少々違うところも幾つかある．

まず，超関数 T が緩増大であるための必要十分条件は，線形形式 $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ が，$\mathscr{C}_c^\infty$ 上で $\mathscr{S}$ からの誘導位相に関して連続なことである．これは $\mathscr{S}'$ から $\mathscr{D}'$ への '自然' な単射 [埋め込み] の定義のいい直しにすぎない．このことから，定理に述べた条件の十分性は明らかである[1]．したがって条件の必要性だけを示せばよい．

T を任意の緩増大な超関数とすれば，整数 $m, h \geqslant 0$ と正の定数 C が存在して，すべての $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$ について

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{|p|\leqslant m} \sup_{x\in \mathbf{R}^n} |(1+|x|^2)^h (\partial/\partial x)^p \varphi(x)|$$

が成立する，そこで

$$\varphi_h(x) = (1+|x|^2)^h \varphi(x)$$

とおけば，φ_h もまたテスト関数である．実際，$\varphi \mapsto \varphi_h$ は $\mathscr{C}_c^\infty$ からそれ自身の上への一対一の線形写像である．さらに $h = 0, 1, \ldots$ に関する帰納法を用いて容易に証明できるように

$$|(\partial/\partial x)^p \varphi(x)| \leqslant C_{p,h}(1+|x|^2)^{-h} \sum_{q\leqslant p} |(\partial/\partial x)^q \varphi_h(x)|$$

が成り立つ．ここで $q \leqslant p$ とは $q_1 \leqslant p_1, \ldots, q_n \leqslant p_n$ のことであり，定数 $C_{p,h}$ は n-系 p と整数 h だけに依存してきまるものである．したがって [別の定数 C' を用いて]

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C' \sup_{|p|\leqslant m} \sup_{x} |(\partial/\partial x)^p \varphi_h(x)| \tag{25.6}$$

---

1)　実際，m：有限整数 $\geqslant 0$ に対して $T = \sum_{|p|<m} (\partial/\partial x)^p f_p$ と書けるとし，定数 $C > 0$ と整数 $N > 0$ が存在して $|f_p(x)| \leqslant C(1+|x|)^N$ がすべての f_p ($|p| \leqslant m$) について $\mathbf{R}^n$ 上で成り立つとして見る．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$ に対して $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|p|<m} (-1)^p \langle f_p, (\partial/\partial x)^p \varphi\rangle$ だから，

$$\begin{aligned}|\langle T, \varphi\rangle| &\leqslant \sum_{|p|<m} \int |f_p(x)(\partial/\partial x)^p \varphi(x)|\,dx \\ &= \sum_{|p|<m} \int |f_p(x)|(1+|x|)^{-N}(1+|x|)^{-n-1}\{(1+|x|)^{N+n+1}|(\partial/\partial x)^p\varphi(x)|\}\,dx \\ &\leqslant C' \sum_{|p|<m} \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |(1+|x|)^{N+n+1}(\partial/\partial x)^p \varphi(x)|\end{aligned}$$

となるからである．$\left(ただし\ C' = C\int (1+|x|)^{-n-1}\,dx\right)$．

を得る．ここで再び微分単項式

$$\rhd = (\partial/\partial x_1)\cdots(\partial/\partial x_n)$$

を導入すれば

$$\sup_x|\varphi(x)| \leqslant \|\rhd\varphi\|_{L^1}$$

だから (上巻 323 頁参照)，これと (25.6) を組合せて

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C' \sup_{|p|\leqslant m+n} \|(\partial/\partial x)^p\varphi_h\|_{L^1} \tag{25.7}$$

を得る．そこで $|p|\leqslant m+n$ となるような n-系 p の個数を N として，$\mathcal{C}_c^\infty$ から積空間 $(L^1)^N = \underbrace{L^1\times\cdots\times L^1}_{N個}$ への単射

$$J: \psi \mapsto ((\partial/\partial x)^p\psi)_{|p|\leqslant m+n}$$

を考える．評価式 (25.7) は，線形汎関数 $J\varphi_h \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ が $J\mathcal{C}_c^\infty$ の上で $(L^1)^N$ からの誘導位相に関して連続であることを示している．したがって，Hahn-Banach の定理により，それは $(L^1)^N$ 全体の上の連続線形汎関数に拡張することができる．ところで，$(L^1)^N$ の双対は標準的に $(L^\infty)^N$ と同形であるから（上巻 319 頁および定理 20.3 参照)，N 個の L^∞ 関数 $h_p(|p|\leqslant m+n)$ が存在して

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|p|\leqslant m+n}\langle h_p, (\partial/\partial x)^p\varphi_h\rangle$$

が成り立つ．これに φ_h を φ で表した式を入れれば，

$$T = \sum_{|p|\leqslant m+n}(1+|x|^2)^h(-1)^{|p|}(\partial/\partial x)^p h_p$$

がただちに得られる．各 p に対して

$$g_p(x) = \int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n} h_p(t_1,\ldots, t_n)\,dt_1\cdots dt_n$$

とおけば，h_p は L^∞ だったから，g_p は $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数となり，かつ

$$|g_p(x)| \leqslant |x_1|\cdots|x_n|\cdot\|h_p\|_{L^\infty}$$

が成り立つ．さらに

$$h_p = \rhd g_p$$

だから，したがって

$$T = \sum_{|p|\leqslant m+2n}(1+|x|^2)^h(\partial/\partial x)^p\tilde{g}_p \tag{25.8}$$

の形の式を得る．$\tilde{g}_p$ の定義は述べるまでもあるまい[1]．ところで，h に関する帰納法で，容易にわかるように

$$(1+|x|^2)^h(\partial/\partial x)^p\tilde{g}_p(x)=\sum_{q\leqslant p}(\partial/\partial x)^q[P_{p,q}(x)\tilde{g}_p(x)]$$

(ただし $P_{p,q}$ は h, p, q だけに依存する多項式) の形の式が成り立つから，これを (25.8) に代入すれば，$T\in\mathscr{S}'$ の求める表現式が得られる．(証終)

緩増大超関数の例

1. コンパクトな台をもつ任意の超関数 (特にコンパクトな台をもつ任意の関数) は緩増大超関数である．
2. 無限遠において，ある多項式よりも増大の仕方がおそいような連続関数すべて緩増大超関数である．
3. ある L^p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ に属するような関数 (のクラス) はすべて緩増大超関数である (その証：$f\in L^p$ ならば

$$\varphi\mapsto\int\varphi(x)f(x)\,dx$$

は $\mathscr{C}_c^\infty$ 上で $\mathscr{S}$ からの誘導位相で連続になるから[2])．

多項式による乗法および多項式係数の微分作用素は，$\mathscr{S}'$ からそれ自身への連続線形写像になる．ここでは，これらの写像はすでに $\mathscr{D}'$ 全体で定義されていることを用いて，それを $\mathscr{S}'$ に制限したと見なすのである．これはまた，$\mathscr{S}$ における同様の写像を転置したものとして定義することもできる．これらの定義が合致していることは，$\mathscr{S}$ で定義されたこれらの写像を $\mathscr{C}_c^\infty$ に制限したものが $\mathscr{S}$ からの誘導位相に関して連続なことを考慮すれば明らかである．

$\mathscr{C}^\infty$ 関数による乗法については次の定理が成り立つ．

定理 25.5. α を $\mathscr{C}^\infty$ 関数とする．次の三つの条件は同値である．

(1)　$\mathscr{S}'$ から $\mathscr{D}'$ への [α による] 乗法写像 $S\mapsto\alpha S$ が，$\mathscr{S}'$ から $\mathscr{S}'$ への

---

1)　$\tilde{g}_p$ は連続であって，$|\tilde{g}_p(x)|\leqslant C''|x_1|\cdots|x_n|$ となる．

2)　Hölder の不等式 (上巻 257 頁) を用いれば明らか．

連続線形写像になる．

(2) $\mathscr{S}$ から $\mathscr{E}^\infty$ への乗法写像 $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ が $\mathscr{S}$ から $\mathscr{S}$ への連続線形写像となる．

(3) 任意の n-系 p に対して $\mathbf{R}^n$ 上の多項式 P_p が存在して，すべての $x \in \mathbf{R}^n$ について不等式

$$|(\partial/\partial x)^p \alpha(x)| \leqslant |P_p(x)|$$

が成り立つ．

定義 25.3. 定理 25.5 に述べた同値な三条件を満たすような $\mathscr{E}^\infty$ 関数 α の全体からなる空間を $\mathscr{O}_M$ によって表わす．

記号 $\mathscr{O}_M$ の由来は，定理 25.5 の条件 (1), (2) から見て，($\mathscr{S}$ および $\mathscr{S}'$ における) 乗法作用素 'multiplication operator' というわけである．条件 (3) から関数 $\alpha \in \mathscr{O}_M$ はしばしば**無限遠において緩増大な** $\mathscr{E}^\infty$ **関数** ($\mathscr{E}^\infty$ function slowly increasing at infinity) とよばれる．

演 習 問 題

25.5. 定理 25.5 を証明せよ．

25.6. 次の二つの性質をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 f の例をあたえよ．

(1) $\mathbf{R}^n$ 上の多項式 P であって，すべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$|f(x)| \leqslant P(x)$$

となるものは存在しない．

(2) 超関数 $\varphi \mapsto \int \varphi(x) f(x)\, dx$ は緩増大である[1]．

25.7. 実数直線上の Radon 測度

$$\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(k)$$

が $\mathbf{R}^1$ 上の緩増大超関数になるための必要十分条件は，整数 $m \geqslant 0$ と定数 $C > 0$ が存在して，すべての $k = 1, 2, \ldots$ に対し

---

1) $n=1$ として，たとえば $f(x) = e^x \cos(e^x) \left[= \dfrac{d}{dx} \sin(e^x) \right]$ を考察してみよ．ここで注意すべきことは，$f \in \mathscr{S}'$ と $\forall \varphi \in \mathscr{S}$, $f\varphi \in L^1$ とは異なる条件になることである．

$$|a_k| \leqslant Ck^m$$

が成り立つことである．これを証明せよ．

さて，緩増大超関数の空間 $\mathscr{S}'$ における **Fourier 変換**を，急減少 $\mathscr{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathscr{S}$ における Fourier 変換の転置として定義しよう．

定義 25.4. 連続線形写像

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto \left(\xi \mapsto \int \exp(-2i\pi\langle x, \xi\rangle)\varphi(x)\,dx\right) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$$

の転置写像を $\mathscr{S}'(\mathbf{R}_n)$ における **Fourier 変換**といい，やはり $\mathscr{F}$ で表わす．

もちろん，ここで $\mathbf{R}^n$ と $\mathbf{R}_n$ を入れ換えてもよい．

定理 25.1 から転置によってただちに (命題 23.1 参照)，次の定理を得る．

定理 25.6. Fourier 変換は $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ から $\mathscr{S}'(\mathbf{R}_n)$ の上への (位相ベクトル空間構造に関する) 同形写像である．

さて，$\mathscr{S}'$ における Fourier 変換は関数の空間における Fourier 変換の拡張になっていることを簡単に —— たとえば $L^2(\mathbf{R}^n)$ の場合について —— 示しておこう．$f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}_n)$ を任意にとる．まず

$$\overline{\mathscr{F}\varphi} = \overline{\mathscr{F}} \cdot \overline{\varphi} \tag{25.9}$$

に注意しよう．ここで上線 $\overline{}$ は複素共役を表わす (ただし $\overline{\mathscr{F}}$ は逆 Fourier 変換)．Parseval の公式から

$$\int f(x)\overline{\overline{\mathscr{F}\varphi}}(x)\,dx = \int \mathscr{F}f(\xi)\overline{\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi}(\xi)\,d\xi$$

を得るが，(25.9) から $\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi = \overline{\varphi}$ だから

$$\langle f, \mathscr{F}\varphi\rangle = \langle \mathscr{F}f, \varphi\rangle$$

となる．これが示すべきことであった．

29 章では，台がコンパクトな超関数の空間における Fourier 変換を考察する．

演 習 問 題

25.8. 関数 $e^{|x|}$ は超関数の意味で Fourier 変換できるか？

25.9. 関数 $e^{i|x|^2}$ の Fourier 変換を計画せよ．

25.10. 関数 $\sin x$ および $\cos x$ $(x \in \mathbf{R}^1)$ の Fourier 変換を計算せよ．

25.11. 実数 s のいかなる値に対して関数 $x \mapsto |x|^s$ は関数であるような緩増大超関数になるか．また，この超関数の Fourier 変換を求めよ．

25.12. Heaviside 関数

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

の $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^1)$ における Fourier 変換を計算せよ．

25.13 超関数

$$(d/dx)\log|x|$$

の $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^1)$ における Fourier 変換を求めよ．

25.14. 多項式による乗法および定数係数の微分作用素は $\mathscr{S}$（あるいは $\mathscr{S}'$）からそれ自身への連続線形写像を定義することを思い出そう．このとき，次の定理を証明せよ．

定理 25.7. P を n 変数の複素係数多項式とし，S を $\mathbf{R}^n$ 上の緩増大超関数とする．このとき

$$\mathscr{F}[P(x)S] = P(-(2i\pi)^{-1}\partial/\partial\xi)\mathscr{F}S \tag{25.10}$$

$$\mathscr{F}[P(\partial/\partial x)S] = P(2i\pi\xi)\mathscr{F}S \tag{25.11}$$

が成り立つ．

25.15. $\mathbf{R}^n$ 上の多項式関数の Fourier 変換を求めよ．

25.16. T を $\mathbf{R}^n$ 上の任意の超関数とする．このとき，$\mathbf{R}_n$ の一点 ξ に関する次の二つの条件は同値であることを証明せよ．

(25.12) $\eta \in \mathbf{R}_n$ が存在して，$\exp(-2\pi\langle\xi+i\eta, x\rangle)T \in \mathscr{S}'_x$

(25.13) すべての $\eta \in \mathbf{R}_n$ について $\exp(-2\pi\langle\xi+i\eta, x\rangle)T \in \mathscr{S}'_x$.

いま Γ_T をこれらの条件 (25,12), (25,13) を満たすような点 ξ の全体の集合とする．このとき，Γ_T が空集合にならないような超関数 T の特徴づけ（定理 25.4 のような）をあたえよ．

25.17. T および Γ_T は前問の通りとする．$T \in \mathscr{E}'$，すなわち T がコンパクトな台をもつときには，Γ_T はどのような集合になるか．

25.18. T および Γ_T を問題26.16の通りとする．Γ_T は凸集合になることを証明せよ．

25.19. T および Γ_T を問題26.16の通りとする．Γ_T の内部を $\mathring{\Gamma}_T$ で表わす．このとき，すべての $\xi+i\eta\in\mathring{\Gamma}_T+i\mathbf{R}_n$ について

$$\exp(-2\pi\langle\xi+i\eta,\ x\rangle)T\in(\mathcal{O}_c{}')_x$$

となることを証明せよ（定義30.1参照）．

25.20. 前問と同じ記号を用いる．Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は変数 $x\in\mathbf{R}^n$ に関する超関数を変数 $\eta\in\mathbf{R}_n$ に関する超関数に写すものとする．任意の $\xi\in\mathring{\Gamma}_T$ に対して

$$\mathcal{F}(\exp(-2\pi\langle\xi,\ x\rangle)T)$$

は $(\mathcal{O}_M)_\eta$ に属することを証明せよ．また，これを $\zeta=\xi+i\eta$ の関数 $F(\xi+i\eta)$ とみたとき $\mathring{\Gamma}_T+i\mathbf{R}_n$ において正則関数[1] になることを証明せよ．（関数 $\mathcal{L}T(\zeta)=F((1/2\pi)\zeta)$ を T の **Laplace 変換** (Laplace transform) とよぶ）．

25.21. 実数直線上の次の超関数の Laplace 変換を求めよ（Y は Heaviside 関数，すなわち $x>0$ では1となり，$x<0$ では0となる関数とする）．

(i) $Y(x)(x^k/k!)$, $k=0, 1,\dots.$

(ii) $\delta^{(k)}$, $k=0, 1,\dots.$

(iii) $Y(x)e^{\zeta x}$, $\zeta\in\mathbf{C}^1$.

(iv) $Y(x)\cos x$, $Y(x)\sin x$.

(v) $Y(x)\cosh x$, $Y(x)\sinh x$.

1) holomorphic function，すなわち複素解析関数．

26.

関数の合成積

f, g を $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ複素数値連続関数とする．f と g の合成積 (convolufion) $f*g$ とは，やはり $\mathbf{R}^n$ 上の関数であって，次の式で定義されるものである．

$$(26.1) \qquad (f*g)(x)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy=\int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy.$$

この定義を見れば明らかなように，f と g が同時にコンパクトな台をもつ必要はない．$f*g$ を定義する積分が意味をもつためには，その'因子' f 又は g の一方がコンパクトな台をもてば十分であって，残りの方の台は任意でよい．この仮定の下において，関数 $f*g$ が連続になることはただちにわかる．さらに $\mathrm{supp}\, f$ と $\mathrm{supp}\, g$ が共にコンパクトならば，$\mathrm{supp}(f*g)$ もコンパクトになる．ところで，f 又は g の一方がコンパクトな台をもつという仮定をはずすとすれば，各 $x\in\mathbf{R}^n$ について，y の関数 $f(y)g(x-y)$ が可積分になることを保障するような条件をつける必要の生ずることは明らかであろう．このことは，これらの関数 f および g が**局所的には**共に可積分であること，無限遠における一方の増大の仕方が他方の減少の仕方と'見合っている'ことの必要性を意味する．始めに述べた場合もこの例になっている．すなわち，f の無限遠における増大の速さが任意でよいとするのならば，g の減少もまた任意に速くなければならない．任意に速く減少するということは，あるコンパクト集合の外では0になるということになる．f に対する条件をそれ程ゆるめない代りに，g に対する条件もそれ程きつくしないような種々の場合が考えられる．たとえば，f は無

限遠で緩慢に増大する —— ある多項式よりもおそく増大するとして，gは急速に減少する —— $1/|x|$のどんな巾よりも速く減少すると仮定して見る．そうすれば $f*g$ が式 (26.1) によって定義できることは明らかである．ところで，これから示すように，fに関する条件を強め，gに関する条件を弱めて，実際には同一の条件にし，さらにこの条件を合成積 $f*g$ も満たすようにすることができる．その条件とは，fおよびgが共に可積分という条件に他ならない！

定理 26.1. p, q, rを $1 \leqslant p, q, r \leqslant +\infty$ となる三つの数で

$$1/r = (1/p)+(1/q)-1 \tag{26.2}$$

を満たすとすれば，コンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の任意の二つの連続関数 f, g について，不等式

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f*g|^r dx\right)^{1/r} \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |g|^q dx\right)^{1/q} \tag{26.3}$$

が成り立つ．

証　明　$h(x) = (f*g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ とおき，$s = p(1-1/q)$ とすれば，Hölder の不等式 (定理 20.3) により

$$|h(x)| \leqslant \left(\int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy\right)^{1/q} \cdot \| |f|^s \|_{L^{q'}}$$

を得る．ここで q' は q の共役指数，すなわち $q'^{-1} = 1-q^{-1}$ である．$sq' = p$ になることを考えれば

$$|h(x)|^q \leqslant \|f\|_{L^p}^{sq} \int |f(x-y)|^{(1-s)q} |g(y)|^q dy \tag{26.4}$$

を得る．さて，ここで次の一般的事実を利用しよう．$t \mapsto \mathbf{f}(t)$ を $\mathbf{R}^n$ から一つの Banach 空間 E への連続写像であってコンパクトな台をもつとする．このとき，積分 $\int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{f}(t)dt$ が定義できる (たとえば Riemann 和を考察することにより，その極限として Riemann 式積分が定義できる)．この積分の値は E の一つの元 $\mathbf{e}$ となるが，これに対して不等式

$$\|\mathbf{e}\| \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \|\mathbf{f}(t)\| dt \tag{26.5}$$

が成り立つ．ここで$\| \ \|$はEにおけるノルムである．この結果は．積分を近似する有限 Riemann 和にノルムに関する‘三角不等式’を適用すればただちに得られる(また，$t \mapsto \|\mathbf{f}(t)\|$ が $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ連続関数になることにも注意しよう)．さて，この不等式を $\mathbf{R}^n$ 上の y の関数

$$y \mapsto |f(x-y)|^{(1-s)q}|g(y)|^q$$

に適用する．この関数は $\mathbf{R}^n$ から任意の L^α の空間(変数 x に関する)への写像として連続であり[1]，コンパクトな台をもつ．$h(x)$ が $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ連続関数であることに注意して，(26.4) と共に (26.5) を適用すれば

$$\||h|^q\|_{L^\alpha} \leqslant \|f\|_{L^p}^{sq}\||f|^{(1-s)q}\|_{L^\alpha}\||g|^q\|_{L^1}$$

を得る．

これを書き直おせば

$$\|h\|_{L^{\alpha q}}^q \leqslant \|f\|_{L^p}^{sq}\|f\|_{L^{\alpha(1-s)q}}^{(1-s)q}\|g\|_{L^q}^q \tag{26.6}$$

となる．ここで $\alpha = r/q$ とすれば，(26.6) の q 乗根をとって，

$$\|h\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^{s}\|f\|_{L^{(1-s)r}}^{1-s}\|g\|_{L^q}$$

となる．これが (26.3) と同じになることは，(26.2) により

$$(1-s)r = \left(1-p+\frac{p}{q}\right)r = pr\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right) = p$$

だからよい．(証終)．

コンパクトな台をもつ連続関数の空間 $\mathscr{C}_c{}^0(\mathbf{R}^n)$ が $L^\alpha(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant \alpha < \infty)$ において稠密になることを用いれば，定理26.1から次の結果を得る．

系 1. $f \in L^p$, $g \in L^q$ とすれば

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

---

1) 一般に $F(x, y)$ を $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ連続関数とすれば，$\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合 K が存在して $\operatorname{supp} F \subseteq K \times K$ となり，また F は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で一様連続になるから，$\lim_{y-y' \to 0} \|F(x, y)-F(x', y')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)_x} = 0$ であり，かつまた y, y' に無関数な定数 C (K の n 次元 Lebesgue 測度に等しいとしてよい) に対して

$$\|F(x, y)-F(x, y')\|_{L^\alpha(\mathbf{R}^n)_x} \leqslant C^{1/\alpha}\|F(x, y)-F(x, y')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)_x}$$

が任意の α $(1 \leqslant \alpha < \infty)$ について成り立つから，写像 $y \longmapsto F(x, y)$ は $\mathbf{R}^n$ から $L^\alpha(\mathbf{R}^n)_x$ への連続写像となる．これを $F(x, y) = |f(x-y)|^{(1-s)q}|g(y)|^p$ に適用すればよい．

は L^r の元を定義する（p, q, r は定理 26.1 の通り）．それを $f*g$ と書けば

$$\|f*g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \tag{26.7}$$

が成り立つ．

これからただちに次の結果が得られる

系 2. $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ とし，$f \in L^1$ を任意に固定したとき

$$g \mapsto f*g$$

は L^p からそれ自身への連続線形写像となる．その（写像の）ノルムは $\leqslant \|f\|_{L^1}$ である．

系 3. 合成積

$$(f, g) \mapsto f*g$$

は $L^1 \times L^1$ から L^1 への双線形写像であって，

$$\|f*g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

が成り立つ．

系 3 の内容はしばしば簡単に《L^1 は**合成積代数** (convolution algebra) をなす》というように表現される．

A を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とし，f, g を $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数とする，f, g のどちらか一方はコンパクトな台をもつとする．f_A によって，$A-\operatorname{supp} g$ [1] では f に等しくそれ以外では 0 になる関数を表わすことにすれば，明らかに任意の $x \in A$ について

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy = \int f_A(x-y)g(y)\,dy \tag{26.8}$$
$$= (f_A*g)(x)$$

が成り立つ．これをまとめれば

命題 26.1. f, g を $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数とし，そのうちの一つはコンパクトな台

1) 代数的な差 $A-\operatorname{supp} g = \{a-x \,;\, a \in A,\ x \in \operatorname{supp} g\}$．集合論的な差 $A \setminus \operatorname{supp} g = \{a \,;\, a \in A,\ a \notin \operatorname{supp} g\}$ ではない．

をもつとする．Aを$\mathbf{R}^n$の部分集合とする．このとき，合成積$f*g$の集合A上での値は，集合

$$A-\operatorname{supp} g=\{x\in\mathbf{R}^n\,;\ \exists x'\in A,\ \ \exists x''\in\operatorname{supp} g,\ \ x=x'-x''\}$$

の補集合の上でのfの値には依存しない．

すでに述べたようにf, g共にコンパクトな台をもつときには，$f*g$もそうである．これは次の命題の系ともみなすことができる．

命題 26.2. f, gを命題26.1の通りとしたとき

$$\operatorname{supp}(f*g)\subseteq\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g \tag{26.9}$$

が成り立つ．(ここで右辺は集合のベクトル和である)．

証 明 xを$\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$の補集合に属するとすれば，$y\in\operatorname{supp} g$のとき$x-y$は$\operatorname{supp} f$の補集合に含まれる．したがって

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)\,dy=0.$$

系 $\operatorname{supp} f$，$\operatorname{supp} g$が共にコンパクトならば，$\operatorname{supp}(f*g)$もまたコンパクトになる．

実際，KおよびHが一つの Hausdorff TVS E (ここでは$\mathbf{R}^n$) のコンパクト集合ならば，$K\times H$は$E\times E$のコンパクト集合になるから，連続写像$(x, y)\mapsto x+y$によるその像$K+H$はEのコンパクト集合となる．

さて，今度は，微分可能性の見地から合成積を考察としてみよう．f, gを二つの$\mathbf{R}^n$上の$\mathscr{C}^1$関数とし，そのうちの一つはコンパクトな台をもつとする．このとき，積分記号下の微分に関する Leibniz の規則を適当すれば

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)\,dy$$

は (各点xにおいて) 微分可能であり

$$(\partial/\partial x_j)(f*g)=((\partial/\partial x_j)f)*g=f*((\partial/\partial x_j)g),\qquad (j=1,\dots,n)$$

となる．これを，二つの連続関数 (そのうちの一つはコンパクトな台をもつと

する）の合成積は連続になることを合わせれば，$f*g$ は $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{C}^1$ 関数になることがわかる[1]．

さらに，(26.8) を f の代わりに $\partial f/\partial xj$ として適用すれば，すべての $x\in A$ について

$$|(\partial/\partial x_j)(f*g)(x)|\leqslant \sup_{y\in B}|[(\partial/\partial x_j)f](y)|\cdot\|g\|_{L^1}$$

が成り立つ（ただし $B=A-\operatorname{supp} g$）．もちろん上式の右辺はしばしば無限大になり得る．しかし，$\operatorname{supp} g$ と A が共にコンパクトならば，有限になる．これから次の結果がただちに出る（それはもっと一般な結果の特別の場合にすぎないが）．

命題 26.3. m を整数とする $(0\leqslant m\leqslant +\infty)$．$g\in L^1$ がコンパクトな台をもつとすれば，合成積

$$f\mapsto f*g$$

は $\mathcal{C}^m(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身への連続線形写像になる．

系. m, g を命題 26.3 のようにするとき，合成積

$$f\mapsto f*g$$

は $\mathcal{C}_c{}^m(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身への連続線形写像である．

系の証明　LF-空間の一般的性質によれば，$\mathbf{R}^n$ の任意のコンパクト集合 K について，写像 $f\mapsto f*g$ を $\mathcal{C}_c{}^m(K)$ に制限したものが $\mathcal{C}_c{}^m(K)$ から $\mathcal{C}_c{}^m(\mathbf{R}^n)$ への写像として連続になることを証明すればよい（命題 13.1 参照）．ところで，命題 26.2 によれば，$\mathcal{C}_c{}^m(K)$ は $\mathcal{C}_c{}^m(K+\operatorname{supp} g)$ に写される．しかもこれらの空間に $\mathcal{C}_c{}^m(\mathbf{R}^n)$ から誘導した位相は $\mathcal{C}^m(\mathbf{R}^n)$ からの誘導位相に一致する．したがって，この系は命題 26.3 からただちに出る．

---

1)　実は $\mathcal{C}^2$ 関数，$(\partial^2/\partial x_j\partial x_k)(f*g)=((\partial/\partial x_j)f)*((\partial/\partial x_k)g)$．

演 習 問 題

26.1. $\mathbf{R}^n$ において，μ を Radon 測度，f をコンパクトな台をもつ連続関数とすれば

$$(\mu * f)(x) = \int f(x-y)\,d\mu(y)$$

は $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数になることを証明せよ．

26.2. f, g を実数直線上の二つの局所 L^1 関数であって，負側の開半直線 $\{t \in \mathbf{R}^1 ; t < 0\}$ で恒等的に 0 になるものとする．このとき

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$$

もまた $\mathbf{R}^1$ 上の局所 L^1 関数であって，$x < 0$ では 0 になることを証明せよ．

26.3. f, $g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ のとき，$f * g$ の Fourier 変換を求めよ．

26.4. f, g を $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数とし，そのうちの一つはコンパクトな台をもつとする．このとき，次の Leibniz の公式：

$$x^p(f * g) = \sum_{q \leqslant p} \binom{p}{q} (x^q f) * (x^{p-q} g)$$

を証明せよ．ただし $p, q \in \mathbf{N}^n$ とし，$q \leqslant p$ は $q_j \leqslant p_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ のこととする．

26.5. f を $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな台をもつ連続関数とする．いま g をそれぞれ多項式，または指数関数 $(x \mapsto \exp(\langle x, \zeta \rangle)$, $\zeta \in \mathbf{C}^n)$，または $\mathbf{C}^n$ 上に整関数とし延長できるような関数とすれば，合成積 $f * g$ もそれぞれ同様のものになることを証明せよ．

27.

[転置写像の例]
超関数の合成積

この章では $\mathbf{R}^n$ 上の二つの超関数 S, T の合成積を，そのうちの一つはコンパクトな台をもつという仮定のもとに定義する．たとえば supp S がコンパクトなら，T は任意でよい．後になれば，この台に関する条件をゆるめるが，もちろんそれは二つの因子 S および T の増大の速さを関係づけて始めて可能になる．たとえば，すでに知っているように，もし S, T が共に L^1 関数であれば，それらの台は任意でよい (いうまでもないが，二つの超関数の合成積は，もしそれらの超関数が関数に等しい場合には，26 章で定義した合成積に一致する!)．他の重要な例として，緩増大超関数の空間 $\mathcal{S}'$ に対して合成積作用素となるような超関数 T を求める．すなわち，すべての $S \in \mathcal{S}'$ との (適当に定義された) 合成積 $S * T$ が再たび緩増大超関数になるような T の全部を決定するということである．T の無限遠における減少度について，相当きつい条件をつける必要のあることがわかるであろう．この事情は，二つの関数 f, g の合成積を定義しようとするとき，もし f が任意の多項式とするならば g は無限遠で急速に減少 (すなわち，$1/|x|$ の任意の巾よりも速く減少) する必要のあることと類似の事情である．

さて，($\mathbf{R}^n$ の一つの開集合上で定義された) 一つの TVS の中に値をとる関数に関する，非常に一般であるが非常に簡単な，次の結果が必要となる．

定理 27.1. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，$x \mapsto \varphi(x)$ を Ω で定義されて一つの Hausdorff TVS E に値をとる一つの関数とする．e' を E 上の任意の連続線形

汎関数とする．このとき

(a) 関数 φ が連続であれば，複素数値関数

$$\Omega \ni x \mapsto \langle e', \varphi(x)\rangle \tag{27.1}$$

も連続になる．

(b) φ が連続であって，かつ Ω の一点 x^0 で φ が微分可能であれば，(27.1) も x^0 で微分可能になり

$$(\partial/\partial x_j)\langle e', \varphi(x)\rangle\Big|_{x=x^0} = \langle e', (\partial\varphi/\partial x_j)(x^0)\rangle \tag{27.2}$$

が成り立つ．

(c) k を有限な正整数または $+\infty$ とする．φ が Ω において E に値をとる $\mathcal{C}^k$ 関数であれば，関数 (27.1) は Ω 上での複素数値 $\mathcal{C}^k$ 関数となり，すべての $p \in \mathbf{N}^n$, $|p| < k+1$ とすべての $x \in \Omega$ に対して

$$(\partial/\partial x)^p\langle e', \varphi(x)\rangle = \langle e', (\partial/\partial x)^p\varphi(x)\rangle \tag{27.3}$$

が成り立つ．

定理 27.1 は一種の‘積分記号下での微分の規則’と考えられる．その証明は，TVS に値をとる微分可能な関数の意味を知れば，自明になる．まず，$t \mapsto f(t)$ を実数直線上の一つの開区間 $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ から Hausdorff TVS E への連続関数 [写像] としよう．“t_0 において $f(t)$ の導関数が存在する” または “f は t_0 において微分可能である” とは，実数 $h \neq 0$ が 0 に収束するとき

$$h^{-1}[f(t_0+h)-f(t_0)]$$

が E において一つの元に収束することをいい，その極限になる元を $f'(t_0)$ で表わす．次に，φ のように $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ で定義されている多変数の関数の場合を考察しよう．“Ω の一点 x^0 において φ の偏導関数が存在する” という意味は明らかである[1]．このとき，φ が x^0 において微分可能であるとは，Ω において $x \to x_0$ のとき

$$\varphi(x)-\varphi(x^0)-\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j^0)(\partial\varphi/\partial x_j)(x^0)$$

---

1) 偏導関数の定義は一変数の問題だから．

が E において 0 に収束することをいう[1].

定理 27.1 の証明 (a) は明白である．なぜなら，写像 (27.1) は連続写像の合成写像 $e'\circ\varphi:\Omega\to\mathbf{C}$ だからである．(c) は (a) と (b) を組合せればできる．(b) は，e' の連続性と上に定義した φ の微分可能性を合わせればできる．証明の詳細は読者に委せる．

定理 27.1. を次の二つの場合に適用する．

(1) $E=\mathcal{E}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. E の各元は $\mathbf{R}^n$ 上の関数であるが，その変数を (区別をはっきりさせるために) $y=(y_1,\dots,y_n)$ で示す．他方，Ω として全空間 $\mathbf{R}^n$ を考えるが，この Ω の変数は x で表わす．

(2) $E=\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$. [あとは (1) と同様.]

これらの二つの場合において，定理 27.1 における関数 φ にあたるものとしては，関数

(27.4) $$x\mapsto(y\mapsto\varphi(x-y))$$

を考える．この式で φ は E のあたえられた元とする (すなわち，場合 (1), (2) に応じて，$\mathcal{E}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ の元または $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の元とする).

補題 27.1. $\varphi\in\mathcal{E}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ (または $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$) とするとき，(27.4) は値を $\mathcal{E}_c^\infty(\mathbf{R}_y^n)$ (または $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}_y^n)$) にとる変数 x の微分可能な関数である．その $x_j(1\leqslant j\leqslant n)$ に関する一階偏導関数は，関数

(27.5) $$x\mapsto(y\mapsto(\partial/\partial x_j)\varphi(x-y))$$

に等しい．

証 明 $\mathcal{E}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ の場合だけを証明する．$\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の場合の証明も類似したものであり，さらに) 簡単になるからである．

x^0 を $\mathbf{R}^n$ の任意の点として，$U=\{x\in\mathbf{R}^n;|x-x^0|<1\}$ とおく．x が U の中を動くとき，関数 $y\mapsto\varphi(x-y)$ の台は一定の集合 $U-\operatorname{supp}\varphi$ に含まれる．この集合は開集合であり，その閉包 K はコンパクトである．さて，$\mathcal{E}_c^\infty(K_y)$ に

1) 変数変換に対して不変なような，もっとよい定義もあるがここでは省略しておく．

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}_y^n)$ から位相を誘導したとき（下添字 y は，これらの空間の元が y の関数であることを示すためである），(27.4) は U 上で $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ に値をもつ関数であって x^0 において微分可能になり，その x_j に関する偏導関数の x^0 における値は (27.5) の x^0 における値に等しいことを証明しよう．そうすれば，x^0 は任意であったから，補題は証明されたことになる．

ところで，$\mathcal{C}_c^\infty(K_y)$ の位相はセミノルムの族

$$\phi \mapsto \sup_{y\in\mathbf{R}^n}|(\partial/\partial y)^q\phi(y)|,\ q\in\mathbf{N}^n$$

によって定義されている．このセミノルムを $\mathfrak{q}_q$ で示す．x の関数 (27.4) を $\tilde{\varphi}$ で，関数 (27.5) を $\tilde{\varphi}_j$ で表わしたとき，証明すべきことは

$$\mathfrak{q}_q\left(\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\varphi}(x^0)-\sum_{j=1}^n(x_j-x_j{}^0)\tilde{\varphi}_j(x^0)\right)$$

が，$x\in U$ が x^0 に収束するとき，0 に収束することである．これは単に，$x\in U$ が x^0 に収束するとき，

$$(\partial/\partial y)^q\varphi(x-y)-(\partial/\partial y)^q\varphi(x^0-y)-\sum_{j=1}^n(x_j-x_j{}^0)(\partial/\partial y)^q(\partial/\partial x_j)\varphi(x^0-y)$$

が，$y\in U-\operatorname{supp}\varphi$ に関して一様に．0 に収束することを意味するから，明らかに成り立つ．

系． $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$（または $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$）とする．関数 (27.4) は値を $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}_y^n)$（または $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_y^n)$）にもつ変数 $x\in\mathbf{R}^n$ の $\mathcal{C}^\infty$ 関数である．

証　明　$E=\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}_y^n)$（または $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_y^n)$）とおく．

(27.4) は各点で可微分だから，いたるところ連続である．その x_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ に関する導関数は (27.5) であたえられるが，この (27.5) は (27.4) に比べて φ が $(\partial/\partial x_j)\varphi$ で置き換えられていることを除けば同じである．したがって (27.5) も E に値をもつ x の連続関数になるから，(27.4) は E に値をもつ $\mathcal{C}^1$ 関数になる．そこで，(27.4) が $\mathcal{C}^k$ 関数になることが $k=0,1,2,\ldots$ の一つ値について証明できたと仮定すれば，同じことがその x_j に関する一階偏導関数についても成り立つ．これは (27.5) が (27.4) と同じ形をしているからである（φ

が $(\partial/\partial x_j)\varphi$ にかわっただけ)．したがって，一階偏導関数はすべて $\mathscr{C}^k$ 関数となる．これは (27.4) が $\mathscr{C}^{k+1}$ 関数であることを意味する．このことから直ちに系が成り立つことがわかる．

定理 27.2. $\mathbf{R}^n$ において φ を $\mathscr{C}^\infty$ 関数，T を超関数とする．二つの集合 $\operatorname{supp}\varphi$, $\operatorname{supp} T$ のうちの一つはコンパクトであると仮定する．このとき

$$x \mapsto \langle T_y,\ \varphi(x-y)\rangle$$

は $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数になる．任意の n-系 $p=(p_1, \dots, p_n)$ について

$$(\partial/\partial x)^p \langle T_y,\ \varphi(x-y)\rangle = \langle T_y,\ (\partial/\partial x)^p \varphi(x-y)\rangle \tag{27.7}$$

が成り立つ．

(記号 T_y は，超関数 T が関数 $\varphi(x-y)$ を y の関数と見なして作用することを表わす)．

証　明　これには Lemma 27.1 の系と定理 27.1 の (c) を合わせればよい (コンパクトな台をもつ超関数は $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 上の連続線形形式であったことを思い出そう)．

定義 27.1. 関数

$$x \mapsto \langle T_y,\ \varphi(x-y)\rangle$$

のことを φ と T の**合成積**とよび，$T*\varphi$ または $\varphi*T$ で表わす．

超関数 T が局所可積分関数 f に等しい場合には

$$\langle T_y,\ \varphi(x-y)\rangle = \int f(y)\varphi(x-y)\,dy$$

となるから，この場合には 26 章 ((26.1) 式) で導入した合成積の概念と一致する．

合成積

$$(\varphi,\ T) \mapsto \varphi * T$$

は $\mathscr{C}_c^\infty \times \mathscr{D}'$ (または $\mathscr{C}^\infty \times \mathscr{E}'$) から $\mathscr{C}^\infty$ への双線形写像である．その基本的性質のいくつかを述べて証明しよう．

式 (27.7) を書き直せば

$$(\partial/\partial x)^p(T*\varphi)=T*[(\partial/\partial x)^p\varphi]$$

となるが，ここで

$$(\partial/\partial x)^p\varphi(x-y)=(-1)^p(\partial/\partial y)^p\varphi(x-y)$$

となることに注意すれば，(27.7) の右辺は

$$\langle(\partial/\partial y)^pT_y,\ \varphi(x-y)\rangle=\{[(\partial/\partial x)^pT]*\varphi\}(x)$$

と書き直すこともできる．したがって

命題 27.1. $\mathbf{R}^n$ 上で，φ を $\mathscr{C}^\infty$ 関数，T を超関数とする．二つの集合 $\operatorname{supp}\varphi$, $\operatorname{supp}T$ のうち少なくとも一つはコンパクトであると仮定する．このとき，すべての n-系 p に対して

$$(\partial/\partial x)^p(T*\varphi)=[(\partial/\partial x)^pT]*\varphi=T*[(\partial/\partial x)^p\varphi]$$

が成り立つ．

もう一つの重要な性質は次のものである．

命題 27.2. T, φ を命題27.1の通りとするとき

(27.8) $$\operatorname{supp}(\varphi*T)\subseteq\operatorname{supp}\varphi+\operatorname{supp}T$$

が成り立つ．

証　明　二つの集合 (閉集合) $\operatorname{supp}\varphi$, $\operatorname{supp}T$ のうちの一つはコンパクトだから，そのベクトル和は $\operatorname{supp}\varphi+\operatorname{supp}T$ 閉集合になる．これは位相空間論の簡単な結果である[1]．そこで U を開集合であってその閉包 $\bar{U}$ が $\operatorname{supp}\varphi+\operatorname{supp}T$ の補集合に含まれるコンパクト集合になるものとすると，コンパクト集合

$$\bar{U}-\operatorname{supp}\varphi$$

1) $\mathbf{R}^n$ において A を閉集合，B をコンパクト集合としたとき，そのベクトル和 $A+B$ が閉集合になることは次のようにしてわかる．$A+B$ の閉包に属する任意の点を c とすれば，c は $A+B$ に含まれる適当な点列 $\{a_n+b_n\}$ $(n=1,2,\dots;\ a_n\in A,\ b_n\in B)$ の極限である．B のコンパクト性はよって，$\{b_n\}$ の適当な部分列 $\{b_{n'}\}$ をとれば $\{b_{n'}\}$ は B において収束する．その極限を b とすれば，$a_{n'}=(a_{n'}+b_{n'})-b_{n'}$ は $(n'\to\infty$ のとき$)$ $c-b$ に収束する．ところで A は閉集合だから，$c-b\in A$．したがって，$c=(c-b)+b\in A+B$．すなわち $A+B$ は閉集合である．

は $\operatorname{supp} T$ と交わらない．したがって，$\operatorname{supp} T$ の近傍で1に等しく $\bar{U}-\operatorname{supp}\varphi$ の近傍で0に等しくなるような $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数 g が存在する（定理16.4）．g はとくに $gT=g$ を満たす．このことから

$$(T*\varphi)(x)=\langle T_y,\ \varphi(x-y)\rangle=\langle g(y)T_y,\ \varphi(x-y)\rangle$$
$$=\langle T_y,\ g(y)\varphi(x-y)\rangle$$

が成り立つ．ところで $x\in U$ のときには，関数 $y\mapsto g(y)\varphi(x-y)$ は恒等的に0になる．実際，もしある点 y において0にならなかったと仮定すれば，$y\in\operatorname{supp} g$ かつ $x-y\in\operatorname{supp}\varphi$ となるが，後者は $y\in U-\operatorname{supp}\varphi$ を意味する．これは g が $\bar{U}-\operatorname{supp}\varphi$ の近傍で0になることから不可能である．（証終）．

次に，写像 $\varphi\mapsto T*\varphi$ の連続性を考察しよう．

定理 27.3. T を $\mathbf{R}^n$ 上の超関数（あるいは，コンパクトな台をもつ超関数）とする．合成積

$$\varphi\mapsto T*\varphi$$

は $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$（あるいは $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$）から $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ への連続線形写像になる．

証　明　任意の（台がコンパクトとは限らない）超関数の場合だけを扱って，$\varphi\mapsto T*\varphi$ が $\mathscr{C}_c^\infty\to\mathscr{C}^\infty$ の連続線形写像になることを証明しよう．もう一つの場合はもっと取り扱いが簡単になる（そして，実際いま扱う場合のものから簡単に従う）．

さて，LF-空間の一般的性質（命題13.1）によって，$\mathbf{R}^n$ の任意のコンパクト集合 K について，$\varphi\mapsto T*\varphi$ が $\mathscr{C}_c^\infty(K)$ から $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ への連続線形写像になることを証明すれば十分である．$\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の位相はセミノルムの族

$$\varphi\mapsto\sup_{x\in H}|(\partial/\partial x)^p\varphi(x)|,\quad H:\mathbf{R}^n\text{ のコンパクト集合},\ p\in\mathbf{N}^n$$

によって定義される．$\operatorname{supp}\varphi$ は K に含まれているとして，x が H の中を動くとき，関数

$$y\mapsto(\partial/\partial x)^p\varphi(x-y)$$

は $\mathscr{C}_c^\infty(H-K)$ の中を動く．T を空間 $\mathscr{C}_c^\infty(H-K)$ 上に制限したものはこの空間上の連続線形形式になるから，定数 $M>0$ と整数 k が存在して，すべての

$\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(H-K)$ に対して

$$|\langle T,\,\psi\rangle| \leqslant M \sup_{|q|\leqslant k}(\sup_{y\in\mathbf{R}^n}|(\partial/\partial y)^q\psi(y)|)$$

が成り立つ．ここで $\psi(y)$ の代りに $(\partial/\partial x)^p\varphi(x-y)$, $x\in H$, $\operatorname{supp}\varphi\subseteq K$ を入れて (27.7) 式 (定理 27.2) を用いれば

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in H}|(\partial/\partial x)^p\langle T_y,\,\varphi(x-y)\rangle|\\&\quad\leqslant M\sup_{|q|\leqslant k}(\sup_{x\in H,y\in\mathbf{R}^n}|(\partial/\partial x)^p(\partial/\partial y)^q\varphi(x-y)|)\\&\quad\leqslant M\sup_{|r|\leqslant k+|p|}(\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n}|(\partial/\partial\xi)^r\varphi(\xi)|)\end{aligned}$$

を得る．これは求める連続性を示している．

系 T をコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の超関数としたとき，合成積

$$\varphi\mapsto T*\varphi$$

は $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身への連続線形写像となる．

証 明 $\mathbf{R}^n$ の任意のコンパクト集合 K に対して，$\varphi\mapsto T*\varphi$ が $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ から $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ への連続線形写像になることを証明すればよい．ところで，定理 27.3 によって，この写像は $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ から $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ への連続写像であり，命題 27.2 によって，$\mathcal{C}_c^\infty(K)$ を $\mathcal{C}_c^\infty(K+\operatorname{supp}T)$ の中へ写す．他方，$\mathcal{C}_c^\infty(K+\operatorname{supp}T)$ 上で $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ からの誘導位相は $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ からの誘導位相と一致するから，この系が得られる．

定理 27.3 の系を用いるならば，いまや任意の超関数 S とコンパクトな台をもつ超関数 T の合成積を容易に定義することができる．しかし，その定義の動機を説明するために，まず S が局所可積分関数 f に等しく，T がコンパクトな台をもつ L^1 関数 g に等しい場合を考えよう．このときには，その合成積 $f*g$ がどうなるべきかは既知である．それは次の局所 L^1 関数である．

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)\,dy=\int f(y)g(x-y)\,dy.$$

そこで φ をテスト関数として，$f*g$ を超関数と考えれば，次のようになる．

$$\langle f*g,\,\varphi\rangle=\iint f(x-y)g(y)\varphi(x)\,dx\,dy$$

$$= \int\left[\int f(x-y)\varphi(x)\,dx\right]g(y)\,dy$$
$$= \langle g,\ \check{f}*\varphi\rangle$$

ここで $\check{f}(x)=f(-x)$ とおいた．同様にして

$$\langle f*g,\ \varphi\rangle = \int f(y)\left[\int g(x-y)\varphi(x)\,dx\right]dy$$
$$= \langle f,\ \check{g}*\varphi\rangle$$

さて，$f\mapsto\check{f}$ という演算は容易に超関数にまで拡張することができる．それには

$$\langle\check{f},\ \varphi\rangle = \int f(-x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(-x)\,dx = \langle f,\ \check{\varphi}\rangle$$

に注意すればよい．

定義 27.2. T を $\mathbf{R}^n$ 上の超関数とするとき，超関数 $\check{T}$ とは次の式で定義されるものとする．

$$\langle\check{T},\ \varphi\rangle = \langle T,\ \check{\varphi}\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n).$$

演算 $\check{T}\mapsto T$ はしばしば**原点に関する折り返し**[1] (symmetry with respect to the origin) とよばれる．(ˇ はチェックと読む).

さて，S, T を $\mathbf{R}^n$ 上の超関数とし，S はコンパクトな台をもつとして，次の二つの写像に注目しよう．

(27.9)　$$\mathscr{C}_c^\infty \ni \varphi \mapsto \varphi*\check{S}\in\mathscr{C}_c^\infty$$

(27.10)　$$\mathscr{C}_c^\infty \ni \varphi \mapsto \varphi*\check{T}\in\mathscr{C}^\infty.$$

これらはともに連続線形写像であり，したがって転置写像が考えられる．(27.9) の転置は $\mathscr{D}'$ からそれ自身への連続線形写像であり，(27.10) の転置は $\mathscr{E}'$ から $\mathscr{D}'$ への連続線形写像である．そして，このとき次の可換性が成り立つ．

定理 27.4. S, T を $\mathbf{R}^n$ 上の超関数とし，S はコンパクトな台をもつとする．このとき，(27.9) の転置による T の像は (27.10) の転置による S の像と一致する．

---

1)　直訳すれば '原点に関する [点] 対称'.

証　明　簡単のために，(27.9) の転置による T の像を $S*T$ で表わし，(27.10) の転置による S の像を $T*S$ で表わす．証明すべきことは $S*T=T*S$ である．

1. 《S, T 共に局所可積分関数の場合》．

S が L^1 関数 f に等しくコンパクトな台をもつとする．T は局所可積分な関数 g に等しいとしよう．φ を $\mathscr{C}_c^\infty$ の任意の元とする．定義によって

$$\langle S*T, \varphi\rangle = \langle T, \check{S}*\varphi\rangle = \left\langle T, \int f(y-x)\varphi(y)\,dy\right\rangle$$
$$= \int g(x)\left[\int f(y-x)\varphi(y)\,dy\right]dx.$$

f と φ がともにコンパクトな台をもつから，積分の順序を交換してもよいことは明らかである．したがって

$$\langle S*T, \varphi\rangle = \langle f*g, \varphi\rangle$$

同様にして

$$\langle T*S, \varphi\rangle = \langle g*f, \varphi\rangle$$

を得る．ただし，記号としては

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy, \quad (g*f) = \int g(x-y)f(y)\,dy$$

を用いた．もちろん $f*g=g*f$ が成り立つから，この場合には証明されたことになる．

2. 《S, T がともにコンパクトな台をもつ場合》．

命題 27.1 を利用すれば，任意の n-系 p について

$$(27.11)\quad \begin{aligned} &(\partial/\partial x)^p(S*T) = [(\partial/\partial x)^p S]*T = S*[(\partial/\partial x)^p T],\\ &(\partial/\partial x)^p(T*S) = [(\partial/\partial x)^p T]*S = T*[(\partial/\partial x)^p S] \end{aligned}$$

の成り立つことがわかる．実際，そのためには任意の超関数 U について

$$\widecheck{(\partial/\partial x)^p U} = (-1)^{|p|}(\partial/\partial x)^p \check{U}$$

となることに注意すればよい．

さて，S, T ともにコンパクトな台をもつとするならば，それぞれがコンパクトな台をもつ L^1 関数の導関数の有限和で表わされる (定理 24.4 の系 2，定理 24.5)．

$$S=\sum_{|p|\leq m_1}(\partial/\partial x)^p f_p,\quad T=\sum_{|p|\leq m_2}(\partial/\partial x)^p g_p$$

等式 (27.1) によって

$$S*T=\sum_{|p|\leq m_1, |q|\leq m_2}(\partial/\partial x)^{p+q}(f_p*g_q)$$

を得るから，$f_p*g_q=g_q*f_p$ に注意しさえすれば，$S*T=T*S$ がこの場合に成り立つことは明らかである．

3. 《一般の場合》.

φ を $\mathcal{C}_c^\infty$ の任意の元とし，$f\in\mathcal{C}_c^\infty$ を $\operatorname{supp} S$ の近傍で1に等しいものとする．$g\in\mathcal{C}_c^\infty$ と $\operatorname{supp}\varphi-\operatorname{supp} f$ の近傍で1に等しいものとしよう．このとき，$fS=S$ だから

$$\langle T*S,\varphi\rangle=\langle S,\varphi*\check{T}\rangle=\langle S, f(\varphi*\check{T})\rangle.$$

他方，$y\in\operatorname{supp}\varphi-\operatorname{supp} f$ なら $g(y)=1$ だから

$$f(x)(\varphi*\check{T})(x)=\langle T_y, f(x)\varphi(x+y)\rangle=\langle T_y, f(x)g(y)\varphi(x+y)\rangle.$$

すなわち

$$f(\varphi*\check{T})=f(\varphi*\check{\widehat{(gT)}})$$

を得るから，結局

$$\text{(27.12)}\qquad \langle T*S,\varphi\rangle=\langle S, f(\varphi*\check{\widehat{(gT)}})\rangle=\langle S,\varphi*\check{\widehat{(gT)}}\rangle =\langle (gT)*S,\varphi\rangle.$$

同様にして

$$\text{(27.13)}\qquad \langle S*T,\varphi\rangle=\langle T,\varphi*\check{S}\rangle=\langle T, g(\varphi*\check{S})\rangle =\langle gT,\varphi*\check{S}\rangle=\langle S*(gT),\varphi\rangle$$

ここで g が $\operatorname{supp}(\varphi*\check{S})$ の近傍で $g=1$ となることを用いた (命題27.1；$\operatorname{supp}\check{S}=-\operatorname{supp} S$ に注意).

gT はコンパクトな台をもつから，場合 2 の結果を用いて

$$S*(gT)=(gT)*S.$$

これと (27.12), (27.13) を合せることにより求める結果が得られる．(証終).

定理 27.4 とその証明には，われわれが必要とする知識がすべて含まれている．

まず第一に，二つの超関数 (そのうち一つは台がコンパクトとする) の合成積を定義することができる．

定義 27.3. S, T を $\mathbf{R}^n$ 上の二つの超関数とする．S はコンパクトな台をもつとする．このとき，S と T の**合成積** —— それを $S*T$ または $T*S$ で表わす —— とは，$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ から $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ への連続線形写像 $\varphi \mapsto \varphi * \check{T}$ の転置による S の像のことをいう．これは $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身への連続写像 $\varphi \mapsto \varphi * \check{S}$ の転置による T の像といっても同値である．

実際，これらの二つの像は，定理 27.4 によって，等しい．

定理 27.4 の証明の最初の場合から，S, T が共に局所可積関数 (S の台はコンパクトとする) のときには，合成積を超関数の意味で考えたものが関数としての合成積に一致することがわかる．このことに留意すれば，定義 27.1 と 27.3 は無矛盾であることが示される．すなわち

定理 27.5. S, T を $\mathbf{R}^n$ 上の二つの超関数とし，そのうちの一つは台がコンパクトとする．さらに，T は $\mathcal{C}^\infty$ 関数 φ に等しいとする．このとき (定義 27.3 による) 合成積 $S*T$ は $\mathcal{C}^\infty$ 関数

$$x \mapsto \langle S_y, \varphi(x-y)\rangle$$

に等しい．

証　明　定理は S が局所可積分関数のときには正しい (定理 27.4 の場合 1.)．そこで S はコンパクトな台をもつ任意の超関数としよう．S は

$$S = \sum_p (\partial/\partial x)^p g_p(x)$$

と表現することができる．ここで和は有限和であり，各 g_p はコンパクトな台をもつ L^1 関数である．(27.11) によって

$$S*T = \sum_p [(\partial/\partial x)^p g_p] * T = \sum_p g_p * [(\partial/\partial x)^p T].$$

ところが，

$$g_p * [(\partial/\partial x)^p T]$$

は関数

$$x \mapsto \int g_p(y)(\partial/\partial x)^p \varphi(x-y)\,dy = \int g_p(y)(-1)^{|p|}(\partial/\partial y)^p \varphi(x-y)\,dy$$
$$= \langle (\partial/\partial y)^p g(y),\ \varphi(x-y)\rangle$$

に等しい．このことからまさに，$S*T$ が関数 $x\mapsto\langle S_y,\ \varphi(x-y)\rangle$ が出る．

今度は S の台がコンパクトではないとする．したがって φ の台はコンパクトとしよう．U を $\mathbf{R}^n$ の任意の有界開集合とする．g を $\mathscr{C}_c^\infty$ 関数であって，開集合 $U-\operatorname{supp}\varphi$ の上では 1 に等しいものとする．開集合 U においては，等式

$$S*T=(gS)*T$$

(U 上の超関数としての等式) が成りり立つことは直ちにわかる．この定理の証明の前半から，$(gS)*T$ は $\mathscr{C}^\infty$ 関数であり，$x\mapsto\langle S_y,\ g(y)\varphi(x-y)\rangle$ に一致する．$x\in U$ とすれば，関数 $y\mapsto\varphi(x-y)$ の台の近傍において $g(y)=1$ となるから，$x\in U$ については

$$\langle S_y,\ g(y)\varphi(x-y)\rangle=\langle S_y,\ \varphi(x-y)\rangle$$

が成り立つ．これは $S*T$ が (U においては) 関数 $x\mapsto\langle S_y,\ \varphi(x-y)\rangle$ に等しいことを意味する．この後者の関数が $\mathscr{C}^\infty$ 関数になることは既知である (定理 27.2)．U は任意だったから，これで定理は証明されたことになる．

定理 27.3 から (連続線形写像の転置は —— 双対空間には強双対位相を入れたとき —— やはり連続線形写像になることを合せ考えれば)，ただちに次の結果を得る．

定理 27.6. 合成積

$$(S,\ T)\mapsto S*T$$

は $\mathscr{E}'\times\mathscr{D}'$ から $\mathscr{D}'$ への**分離連続** (separately continuous) な双線形写像である．

ここで '分離連続' とは，S を固定したときに線形写像 $T\mapsto S*T$ は $\mathscr{D}'$ から $\mathscr{D}'$ への連続写像になり，T を固定したときには $S\mapsto S*T$ が $\mathscr{E}'$ から $\mathscr{D}'$ への連続写像になることをいう．

また，等式 (27.11) から次の命題を得る．

命題 27.3. $S \in \mathscr{E}'$, $T \in \mathscr{D}'$ とすれば任意の n-系 p について

$$(\partial/\partial x)^p(S * T) = [(\partial/\partial x)^p S] * T = S * [(\partial/\partial x)^p T]$$

が成り立つ．

また次のことも成り立つ．

命題 27.4. $S \in \mathscr{E}'$, $T \in \mathscr{D}'$ に対して

$$\mathrm{supp}(S * T) \subseteq \mathrm{supp}\, S + \mathrm{supp}\, T$$

証　明　$\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$ をその台が閉集合 $\mathrm{supp}\, S + \mathrm{supp}\, T$ の補集合に含まれるようにとれば $\mathrm{supp}\, \varphi - \mathrm{supp}\, S$ は $\mathrm{supp}\, T$ の補集合に含まれるコンパクト集合となる．命題 27.2 によって

$$\mathrm{supp}(\check{S} * \varphi) \subseteq \mathrm{supp}\, \varphi + \mathrm{supp}\, \check{S}$$

であり，$\mathrm{supp}\, \check{S} = -\mathrm{supp}\, S$ だから $\langle T, \check{S} * \varphi \rangle = 0$．これは $\langle T * S, \varphi \rangle = 0$．

(証終)．

系　S, T が共にコンパクトな台をもてば，$S * T$ も台がコンパクトになる．

この系は，$\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ超関数の空間 $\mathscr{E}'$ が加法と合成積の演算に関して環をなすことを示している [1]（実際には，そのベクトル空間の構造も考えれば一つの代数をなす）．事実，次のことが成り立つ．

定理 27.7. $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ超関数の空間 $\mathscr{E}'$ は Dirac 測度を単位元とする可換代数をなす．

$\mathscr{E}'$ における合成積の可換性は，定理 27.4 を S, T がコンパクトな台をもつ場合について述べ直したに過ぎない．Dirac 測度が合成積に関する単位元になることは，もっと一般な次の事実から従う [1]．

1) 合成積演算の結合律については 365 頁脚註参照．

命題 27.5. $\mathbf{R}^n$ 上の任意の超関数 T に対して

$$T * \delta = T$$

が成り立つ.

証 明 明らかに $\check{\delta} = \delta$ だから，任意のテスト関数 φ について

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T, \varphi * \delta \rangle$$

となる. ところが

$$(\varphi * \delta)(x) = \langle \delta_y, \varphi(x-y) \rangle = \varphi(x)$$

だからよい. (証終).

系 $T \in \mathscr{D}'$, $p \in \mathbf{N}^n$ に対して

$$(\partial/\partial x)^p T = [(\partial/\partial x)^p \delta] * T$$

証 明 命題27.3と27.5を合せればよい.

そこで，超関数の**平行移動** (translation) を定義しておこう. a を $\mathbf{R}^n$ の任意のベクトルとして，関数 f の a による平行移動 $\tau_a f$ を公式

$$(\tau_a f)(x) = f(x-a), \ x \in \mathbf{R}^n$$

によって定義する. f を局所積分関数，φ をテスト関数とすれば

$$\int f(x-a)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(x+a)\,dx.$$

これは

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} f \rangle$$

と表わすことができる. これから次の定義が出る.

定義 27.4 T を $\mathbf{R}^n$ 上の超関数，a を $\mathbf{R}^n$ に属するベクトルとしたとき，T の a による**平行移動** (translation) を $\tau_a T$ と書き，次の式によって定義する.

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle, \ \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty.$$

演 習 問 題

27.1. 次の命題とその系を証明せよ.

命題 27.6. S, T を $\mathbf{R}^n$ 上の二つの超関数でそのち一つはコンパクトな台をもつとする．$a \in \mathbf{R}^n$ としたとき

$$\tau_a(S * T) = (\tau_a S) * T = S * (\tau_a T)$$

が成り立つ．

系 T を $\mathbf{R}^n$ 上の超関数，$a \in \mathbf{R}^n$ としたとき

$\tau_a T = \delta_a * T$, δ_a：点 a における Dirac 測度が成り立つ．

有限個の超関数 (一つを除いてすべてコンパクトな台をもつとする) の合成積は結合的であことに注意しておこう[1)]．

演 習 問 題

27.2. $\mathbf{R}^n$ において T をコンパクトな台をもつ超関数とし，f を関数とするとき，次のことを証明せよ．

(1) f が多項式ならば $T*f$ も多項式になる．

(2) f を指数関数 $\exp\langle x, \zeta\rangle$ ($\zeta \in \mathbf{C}^n$) とすれば

$$(T*f)(x) = C(\zeta)\exp\langle x, \zeta\rangle$$

となる．定数 $C(\zeta)$ の値は何か

(3) f を解析関数とすれば $T*f$ も解析関数になる．

(4) f を $\mathbf{C}^n$ 上の整関数の $\mathbf{R}^n$ への制限であるとすれば $T*f$ も同様である．

(5) f を $\mathbf{C}^n$ 上の指数型整関数の $\mathbf{R}^n$ への制限であるとすれば $T*f$ も同様である．

27.3. T を $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ任意の超関数とするとき

$$(\partial/\partial x_j)T = \lim \frac{1}{h}(\tau_{h_j}T - T)$$

となることを証明せよ．ただし h_j は $\mathbf{R}^n$ のベクトルで，その k 番目の成分は $k \neq j$ なら 0 に等しく，その第 j 成分が実数 $h > 0$ に等しいものする；極限の意味は $h \to 0$ のときの空間 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ における極限である．

27.4. f, g を実数直線上のコンパクトな台をもつ $\mathscr{C}^\infty$ 関数とする．Y を Heaviside 関

1) 三個の場合について述べれば十分，R, S, T を (一つを除けばすべてコンパクトな台をもつ) $\boldsymbol{R}^n$ 上の超関数として，$(R*S)*T = R*(S*T)$ を示せばよい．定義に従がって計算すれば，$\langle (R*S)*T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi * \widecheck{(R*S)}\rangle = \langle T, \varphi * \check{R} * \check{S}\rangle$，$\langle R*(S*T), \varphi\rangle = \langle S*T, \varphi*\check{R}\rangle = \langle T, (\varphi*\check{R})*\check{S}\rangle$, $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$ となるから，結局 $(\varphi*\check{R})*\check{S} = \varphi*(\check{R}*\check{S})$ を示せばよい．同じ議論をくりかえすと，三つのうち二つは $\mathscr{C}_c^\infty$ の元の場合になり，さらには三つとも $\mathscr{C}^\infty$ の元の場合に帰着する．これは計算で容易に検証できる．

数，すなわち $x>0$ では1に等しく，$x<0$ では0に等しい関数とする．このとき次の公式を検証せよ．

$$(d/dx)^p(f*(Yg)) = f*[(d/dx)^p(Yg)]$$

27.5. Γ を $\mathbf{R}^n$ の一つの**閉凸尖錐**[1] とせよ．すなわち，$\bar{\Gamma}=\Gamma$，すべての $\rho>0$ に対して $\rho\Gamma\subseteq\Gamma$, $\Gamma+\Gamma\subseteq\Gamma$, Γ は直線を含まない[2] とする．$\mathscr{D}'(\Gamma)$ によって $\mathbf{R}^n$ 上の超関数でその台が Γ に含まれるもの全体のなす $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ の線形部分空間を表わす．$\mathscr{E}'(\Gamma)$ によって共通部分 $\mathscr{D}'(\Gamma)\cap\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，すなわち $\mathbf{R}^n$ 上の超関数で Γ に含まれるようなコンパクトな台をもつもの全体を表わす．

任意の二つの超関数 $U, V\in\mathscr{D}'(\Gamma)$ に対して，次の性質をもつ超関数 $W\in\mathscr{D}'(\Gamma)$ が一意的に存在することを証明せよ．その性質とは：任意の $\rho>0$ について，もし U', $V'\in\mathscr{E}'(\Gamma)$が開球 $\{x\in\mathbf{R}^n\,;\,|x|<\rho\}$ においてそれぞれ U, V に等しいならば，等式

$$W=U'*V' \quad (\text{開球 } \{x\,;\,|x|<\rho\} \text{ において})$$

が成り立つ

$\mathscr{D}'(\Gamma)$ における合成積をこの W を用いて $W=U*V$ と定義するならば，$\mathscr{D}'(\Gamma)$ は ($\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ における合成積を誘導した) $\mathscr{E}'(\Gamma)$ を部分代数として含む可換合成積代数となることを証明せよ．

この結果を，$n=1$, $\Gamma=\{t\in\mathbf{R}^1\,;\,t\geqslant 0\}$ の場合に適用して，$\mathbf{R}^1$ 上の局所可積分関数で $t<0$ において恒等的に0になるような二つの関数の合成積を求めよ．(この場合の $\mathscr{D}'(\Gamma)$ は通例 $\mathscr{D}_+'$ と表わされる)．

27.6. $\mathbf{R}^1$ 上の超関数でその台が正の閉半直線 $\{t\,;\,t\geqslant 0\}$ に含まれるもの全体のなす空間を $\mathscr{D}_+'$ で表わす．$\mathscr{D}_+'$ を前問で定義された合成積に関する合成積代数と見なす，次のことを証明せよ．

(1) 原点に台をもつ超関数の全体からなる $\mathscr{D}_+'$ の部分空間 $\mathscr{D}_0'$ の零でない元はすべて $\mathscr{D}_+'$ において**可逆** (invertible)[3] である．

(2) その台が閉半直線 $\{t\,;\,t\geqslant a\}$, $a>0$ に含まれるような超関数全体のなす $\mathscr{D}_+'$ の部分空間は $\mathscr{D}_+'$ の**イデアル** (ideal) である．

27.7. 前問における合成積代数 $\mathscr{D}_+'$ を考える．

超関数 $Y(t)(t^k/k\,!)$ $(k=0, 1, 2,\ldots)$ は $\mathscr{D}_+'$ において可逆であることを証明し，その逆元を求めよ (Y は Heaviside 関数，すなわち $t>0$ では1，$t<0$ では0に等しい関数)．

---

1) (closed convex salient cone)，錐は原点0を頂点とする．

2) '原点を通る直線を含まない' としても同じ；これが**尖** (salient) の意味である．

3) 任意の $T\in\mathscr{D}_0'$ に対して $S\in\mathscr{D}_+'$ が存在して $S*T=T*S=\delta$ となることを意味する．S を T の**逆元** (inverse) という．

$\mathbf{R}^1$ 上の連続関数 f であって，$t>0$ では $f(t)>0$ となり，$t<0$ では $f(t)=0$ となるが，合成積代数 $\mathcal{D}_+'$ の中では逆元をもたないものの例を挙げよ．

27.8. $\{t\,;\,t\geqslant 0\}$ の一つの部分集合を A とする．$\mathbf{R}^1$ 上の超関数でその台が A に含まれるもの全体のなす空間を $\mathcal{D}'(A)$ と書く．$\mathcal{D}'(A)$ が合成積代数 $\mathcal{D}_+'$ のイデアルになるための A に関する必要十分条件をあたえよ（演習問題 27.6 と 27.7 参照）．また，$\mathcal{D}'(A)$ の形に表わせないような $\mathcal{D}_+'$ のイデアルの例をあたえよ．

28.

切り落しと正則化による超関数の近似

この章では，$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の任意の超関数 T は $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に属する関数列の極限になること，さらにこのような列を T から構成する標準的な手法の存在することを述べる．

$\{\Omega_k\}$ $(k=0, 1,\ldots)$ を Ω の開部分集合の列であって，その合併が Ω に等しく，$\Omega_{k-1} \subseteq \Omega_k$ $(k=1, 2,\ldots)$ となるものとする．各 k に対して $g_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ を Ω_k 上では1に等しい関数としておく．いま，Ω 上の任意の超関数 T があたえられたとき，超関数 g_kT が T に $\mathcal{D}'(\Omega)$ において収束すること —— たとえば強収束位相に関して —— は明らかである．強収束ということは重要ではない．直ぐ後に見るように，列に関しては $\mathcal{D}'(\Omega)$ における強収束と弱収束は一致するからである[1]．いずれにしても，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ の有界集合とすれば，Ω のコンパクト部分集合 K が存在して $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(K)$ となり（命題14.6），また K のコンパクト性から整数 $k(K)$ が存在して，すべての $k \geqslant k(K)$ について $K \subseteq \Omega_k$ となるから，すべての $\varphi \in \mathcal{B}$ とすべての $k \geqslant k(X)$ について $g_k\varphi = \varphi$ となる．このとき，すべての $\varphi \in \mathcal{B}$，$k \geqslant k(K)$ について

$$\langle g_kT, \varphi\rangle = \langle T, g_k\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

となるが，これは $g_kT \to T$ が $\mathcal{D}'(\Omega)$ において成り立つことを意味する．関数列 g_k がだんだんに大きくなってゆく開集合上で1になるということは，$g_kT \to T$ という結論を出すために必要というわけではない．このことと関連して，

1) しかし，検証するには弱収束を用いるのが便利である．以下の場合でも弱収束だけを検証するのと比較して見るのがよい．

次の演習問題をおく．

演習問題 28.1. 関数列 $\{g_k\}$ を $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において Ω 上の恒等的に 1 という関数に収束するものとする．このとき Ω 上の任意の超関数 T に対して，超関数列 g_kT は $\mathcal{D}'(\Omega)$ において T に収束することを証明せよ．さらに，T がコンパクトな台をもつときには，g_kT は T に $\mathcal{E}'(\Omega)$ において収束することを証明せよ．

さて前の議論にもどって，上の考察において $\overline{\Omega}_k$ をコンパクトとし，関数 g_k はコンパクトな台をもつようにすることができる．そのときには次のように述べられる．

定理 28.1. T を Ω 上の超関数とするとき，コンパクトな台をもつ超関数列 $\{T_k\}$ $(k=0, 1, \ldots)$ で次の性質をもつものが存在する．すなわち，Ω の任意の相対コンパクトな開部分集合 Ω' に対して整数 $k(\Omega')\geqslant 0$ が存在して，すべての $k\geqslant k(\Omega')$ について T_k の Ω への制限 $T_k|\Omega'$ は T の Ω' への制限 $T|\Omega'$ に一致する．

T と T_k を定理 28.1 のようにすれば，Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対して整数 $k(K)$ が存在して，T と T_k は K のある近傍において等しい．とくに

$$K\cap \operatorname{supp} T = K\cap \operatorname{supp} T_k$$

となる．

注意 28.1. 上記の操作，すなわち Ω の相対コンパクト開集合上で 1 に等しいコンパクトな台をもつ $\mathcal{E}^\infty$ 関数 g_k (ただし g_k が 1 に等しい部分集合が $k\to\infty$ のとき Ω を埋めつくす) を超関数に掛けるという演算は，関数に対する‘**切り落し** (cutting[1])’の操作を超関数の場合に拡張したものに当る．関数を取り扱う場合には，Ω 上の関数 f を，Ω_k 上では f に等しく Ω_k の外では 0 となる関数 f_k の極限と見なすのである．このときは明らかに，f_k は f に Ω の各コンパクト集合上で一様に収束する．f_k は f と Ω_k の**定義関数**[2] φ_{Ω_k} の積であることに

---

1) truncation ともいう．

2) characteristic function ; $x\in\Omega_k$ なら $\varphi_{\Omega_k}(X)=1$, 外では 0.

注意しよう．もちろん超関数に φ_{Ω_k} を掛けることはできない．φ_{Ω_k} が滑らかな関数ではないからである．かくして超関数に掛けるものは (コンパクトな台をもつ) $\mathcal{C}^\infty$ 関数で Ω_k 上では φ_{Ω_k} に一致するもの，すなわち Ω_k 上で 1 に等しいものということになる．

Ω 上の任意の超関数をコンパクトな台をもつ Ω 上の超関数の列で近似することを述べたが，次の段階はコンパクトな台をもつ超関数をテスト関数の列で近似することである．これは，あたえられた超関数と Dirac 測度に収束する $\mathcal{C}_c^\infty$ 関数の列との合成積を考えることによってできる．したがって，前章 (27 章) で確立した合成積の諸性質を利用することになる．

まず，超関数 T と $\mathcal{C}^\infty$ 関数 φ (二つのうちの一つはコンパクトな台をもつとして) の合成積の考察から始める．φ も超関数と見ることができるが，その場合には合成積 $T*\varphi$ は超関数

$$\mathcal{C}_c^\infty \ni \phi \mapsto \langle T*\varphi,\ \phi\rangle = \langle T,\ \check{\varphi}*\phi\rangle$$

に等しい．ただし $\check{\varphi}(x)=\varphi(-x)$ である．しかし実際には $T*\varphi$ は $\mathcal{C}^\infty$ 関数であり，関数

$$x \mapsto \langle T_y,\ \varphi(x-y)\rangle$$

に一致する (定理 27.5)．われわれの求める近似定理は次の補題から従がう．

補題 28.1. ρ を次式で定義される関数とする．

$$\rho(x)=\begin{cases} a\exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right), & (|x|<1 \text{ のとき})\\ 0, & (|x|\geqslant 1 \text{ のとき}).\end{cases}$$

ただし

$$a^{-1}=\int_{|x|<1}\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)dx$$

とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，関数 $x\mapsto \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ を ρ_ε で表わす．このとき，関数列 $\{\rho_{1/j}\}$ $(j=1,2,\ldots)$ は $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ超関数の空間 $\mathcal{E}'$ において Dirac 測度 δ に収束する．

(関数 ρ_ε については 15 章上巻 190 頁参照)．

証　明　読者は補題15.2の証明に目を通しておくことを奨める．そこでの議論とこの証明とは密接に関連している．

f を $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{E}^\infty$ 関数とすれば

$$\left|f(0)-\int \rho_\varepsilon(x)f(x)\,dx\right| \leqslant \int \rho_\varepsilon(x)|f(x)-f(0)|dx$$
$$\leqslant \sup_{|x|<\varepsilon}|f(x)-f(0)|\int \rho_\varepsilon(x)\,dx$$
$$\leqq \sup_{|x|<\varepsilon}|f(x)-f(0)|.$$

$\varepsilon<1$ と仮定してもよいから，$|x|<\varepsilon$ のときには

$$|f(x)-f(0)| \leqslant C|x|\sup_{|x|<1}\sum_{j=1}^{n}|(\partial/\partial x_j)f(x)|$$

から

$$\left|f(0)-\int \rho_\varepsilon(x)f(x)\,dx\right| \leqslant C\varepsilon\sup_{|x|<1}\sum_{j=1}^{n}|(\partial/\partial x_j)f(x)|$$

を得る．この式から，f が $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の（実際には $\mathcal{E}^1(\mathbf{R}^n)$ の）一つの有界集合に留まるときには，$\langle\rho_\varepsilon, f\rangle$ が $f(0)$ に収束する（$\varepsilon\to 0$ のとき）ことがわかる．

（証終）．

関数 ρ_ε の正確な形は必要とはしなかったことに注意しておこう．このことに関連して，次の演習問題をあげておく．

演習問題 28.2. $\{\mu_k\}$ を $\mathbf{R}^n$ 上の Radon 測度の列で次の性質をもつとする：

(1) $\operatorname{sup}\mu_k$ は $x=0$ を中心とする半径 r_k の球に含まれているとし，$k\to\infty$ のとき $r_k\to 0$ とする．

(2) 数列 $\{\langle\mu_k, 1\rangle\}$（1 は $\mathbf{R}^n$ 上で恒等的に 1 に等しい関数を表わす）は $k\to\infty$ のとき 1 に収束する．

(3) 定数 $C>0$ が存在して，すべての $k=1, 2, \ldots$ とすべての関数 $f\in C_c^0(\mathbf{R}^n)$ について

$$|\langle\mu_k, f\rangle| \leqslant C\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|f(x)|$$

が成り立つ．

これらの仮定のもとに，μ_k は $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ において δ に収束することを証明せよ．

μ_k が単に $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ において δ に収束することだけを要求する場合には上の仮定をどの

ように変更することができるか．

いまや次の事実を証明するのは容易である．

定理 28.2. TをΩ上の超関数とするとき，次の性質をもつ関数の列 $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ $(k=1, 2,\ldots)$ が存在する．

(i) φ_k は $\mathcal{D}'(\Omega)$ において T に収束する．もしTの台がコンパクトならば，φ_k は $\mathcal{E}'(\Omega)$ において T に収束する．

(ii) Ω の各コンパクト集合 K について，$K \cap \operatorname{supp}\varphi_k$ は $K \cap \operatorname{supp} T$ に収束する．もし $\operatorname{supp} T$ がコンパクトならば，$\operatorname{supp}\varphi_j$ は $\operatorname{supp} T$ に収束する．

距離空間 E (その距離を $(x, y) \mapsto d(x, y)$ とする) において，部分集合の列 $\{A_k\}$ が一つの部分集合 A に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して整数 $k(\varepsilon) \geqslant 0$ が存在して，すべての $k \geqslant k(\varepsilon)$ について

$$A_k \subseteq \{x \in E\,;\, d(x, A) < \varepsilon\}$$

$$A \subseteq \{x \in E\,;\, d(x, A_k) < \varepsilon\}$$

が成り立つことをいう．ここで，任意の $B \subseteq E$ に対して $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$ としている．

定理 28.2 の証明 まず定理 28.1 におけるようなコンパクトな台をもつ超関数の列 T_k $(k=0, 1,\ldots)$ をえらぶ．すなわち，Ω の任意の相対コンパクト開集合 Ω' に対して整数 $k(\Omega')$ が存在して，$k \geqslant k(\Omega)$ ならば $T_k|\Omega' = T|\Omega'$ が成り立つとする．次に関数列

$$\rho_{1/j} * T_k$$

を考える．このとき

$$\operatorname{supp}(\rho_{1/j} * T_k) \subseteq \operatorname{supp}\rho_{1/j} + \operatorname{supp} T_k$$

となること (命題 27.5) に注意しよう．さて，各kに対してjを次の二つの条件が成り立つようにえらぶ：$j \geqslant k$ (これは $j \to +\infty$ にできるため)，$\operatorname{supp} T_k$

の $1/j$ 位の近傍[1] が Ω のコンパクト部分集合になるほどに j は大きい．このようにえらんだ整数 j を j_k と書こう．このとき，テスト関数の列 $\varphi_k=\rho_{1/j_k}*T_k$ は T に $\mathscr{D}'(\Omega)$ において収束することを示そう．

実際，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の有界集合とすれば，Ω のコンパクト集合 K が存在して，すべての $\varphi\in\mathscr{B}$ について $\operatorname{supp}\varphi\subseteq K$ となる．いま Ω の相対コンパクト開集合 Ω' を K を含むようにとる．$k\geqslant k(\Omega)$ となる k に対しては $T_k|\Omega'=T|\Omega'$ であり，他方 $1/k<d(K, \complement\Omega')$ であれば

$$\operatorname{supp}(\rho_{1/j_k}*\varphi)\subseteq\Omega'$$

がすべての $\varphi\in\mathscr{B}$ について成り立つ．それは $j_k\geqslant k$ による．また $\check{\rho}=\rho$ だから，すべての $\varphi\in\mathscr{B}$ について

$$\begin{aligned}\langle\varphi_k-T, \varphi\rangle&=\langle T_k, \rho_{1/j_k}*\varphi\rangle-\langle T,\varphi\rangle\\&=\langle T, \rho_{1/j_k}*\varphi\rangle-\langle T, \varphi\rangle\\&=\langle gT, \rho_{1/j_k}*\varphi\rangle-\langle gT, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

ただし g は Ω' 上で1に等しいような任意の $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ に属する関数とする．これは，k を十分大きくえらべば，すべての $\varphi\in\mathscr{B}$ について

$$\langle\varphi_k-T, \varphi\rangle=\langle\rho_{1/j_k}*(gT)-gT, \varphi\rangle$$

となることを意味する．ところで gT はコンパクトな台をもつ一定の超関数であり，$\rho_{1/j_k}\to\delta$ が $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ で成り立つから，定理27.6を適用すれば，$\mathscr{B}$ 上で一様に $\rho_{1/j_k}*(gT)\to gT$ を得る．これが証明すべきことであった．

T の台がコンパクトな場合に φ_k が T に $\mathscr{E}'(\Omega)$ において収束することを見るのは容易である．まず，すべての k に対して $T_k=T$ とすることができ，$1/k<d(\operatorname{supp}T, \complement\Omega)$ ならば $\varphi_k=\rho_{1/k}*T$ ととることができる．$\rho_{1/k}\to\delta$ は $\mathscr{E}'(\Omega)$ で正しいから，なおのこと $\mathscr{D}'(\Omega)$ でも成り立ち，したがって定理27.6により，φ_k が T に $\mathscr{E}'(\Omega)$ で収束することがわかる．

定理28.2に述べた性質(ii)は，関数 φ_k の定義から明らかである．(証終)．

系 $\mathbf{R}^n$ の任意の開部分集合 Ω に対して，$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ は $\mathscr{E}'(\Omega)$ および $\mathscr{D}'(\Omega)$ にお

1) $\{x\in\mathbf{R}^n; d(x, \operatorname{supp}T_k)\leqslant 1/j\}$ のこと．

いて**列的に稠密** (sequentially dense) である．

定理 15.4 に定理 28.2 の間の密接な関係は，わざわざ注意するまでもあるまい．これらの定理に述べられたことは，しばしば《**切り落しと正則化による近似**》[1] とよばれる． 超関数と $\mathcal{C}^\infty$ 関数の合成積を作る操作は， しばしばその超関の**正則化** (regularization) (あるいは**平滑化** (smoothing)) とよばれる．'**切り落し** (cutting)' というのは，超関数に一つの相対コンパクト開集合 Ω' 上で 1 に等しく Ω' の閉包のある近傍の外では 0 になるような $\mathcal{C}^\infty$ 関数を掛けることである．

定義 28.1. Ω 上の一つの超関数の空間 $\mathcal{A}$ が**正規** (normal) であるとは，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ が $\mathcal{A}$ に含まれて $\mathcal{A}$ で稠密であり，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{A}$ への単射 (埋め込み写像) が連続になることをいう．

Ω 上の超関数の空間 (定義 23.1) とは，$\mathcal{D}'(\Omega)$ の線形部分空間であって，$\mathcal{D}'(\Omega)$ からの誘導位相よりも細かい局所凸位相を備えたものであることを思い出そう．

命題 28.1. $\mathcal{A}$ を Ω 上の正規な超関数空間とすれば，$\mathcal{A}$ の強双対空間は Ω 上の一つの超関数空間に標準的に同形になる．

この事実は本質的にはすでに (23 章で) 証明されており，しばしば利用している．$j : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{A}$ を自然な単射 (埋め込み) とすれば，j の像が稠密なことから j の転置 t_j は $\mathcal{A}$ の強双対 $\mathcal{A}'$ から $\mathcal{D}'(\Omega)$ への一対一の連続写像となる．

Ω 上の正規超関数空間の例

(i) $\mathcal{C}^m(\Omega)$, $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ $(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ (定理 15.4 の系 1 と系 2).

(ii) $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < 8)$ (定理 15.4 の系 3).

(iii) $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ (定理 28.2 の系).

---

1) approximation by cutting and regularization.

正規でない超関数空間の例

$L^\infty(\Omega)$ (Ω は空でないとする), $H(\mathbf{R}^n)$: 整関数として $\mathbf{C}^n$ に延長できるような関数全体の空間 ($\mathbf{C}^n$ 上の整関数全体の空間 $H(\mathbf{C}^n)$ からの誘導位相を入れる). $L^\infty(\Omega)$ は $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ を含むが, $H(\mathbf{R}^n)$ と $\mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ との共通部分は関数 0 しかないことに注意しておこう.

注意 28.2. 正規超関数空間の双対は (命題 28.1 によって一つの超関数空間にはなるが) 正規超関数空間になるとは限らない. それは, $\mathscr{A} = L^1(\Omega)$, $\mathscr{A}' = L^\infty(\Omega)$ の例が示す通りである.

演習問題 28.3. $\{g_k\}$ を $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathscr{C}_c^\infty$ 関数の列で, $|x| < k$ で $g_k(x) = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ であり, 任意の n-系 p に対して定義 $C_p > 0$ が存在して, すべての $k = 1, 2, \ldots$ について

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |(\partial/\partial x)^p g_k(x)| \leqslant C_p$$

が成り立つものとする. このとき, 任意にあたえられた $\mathbf{R}^n$ 上の緩増大超関数 S に対して, $g_k S$ は S に $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ において ($k \to \infty$ のとき) 収束することを証明せよ. $\mathscr{S}'$ においてて $g_k S$ が S に弱収束することだけを証明してもよい ; $\mathscr{S}'$ における列に関しては, 弱収束と強収束は一致することを後に見る.)

また, 上の条件をみたす g_k を構成して見よ.

注意 28.3. 演習問題 28.3 の系として, $\mathscr{S}'$ が $\mathbf{R}^n$ 上の正規超関数空間であることがわかる. $\mathscr{S}$ が $\mathbf{R}^n$ 上の正規超関数空間であることは既知である (定理 15.5).

演 習 問 題

28.4. 次の補題を証明せよ.

補題 28.2. 関数列

$$(k/\pi^{1/2})^n \exp(-k^2 |x|^2), \quad k = 1, 2, \ldots$$

は $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ において Dirac 測度 δ に収束する.

(補題 15.1 および補題 28.1 参照).

28.5. 次の結果を証明せよ．

定理 28.3. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．Ω 上の任意の超関数は多項式関数の列の極限であることを証明せよ．
（ヒント：定理 28.1 と補題 28.2 を利用せよ；また，補題 15.1 および演習問題 27.2 参照）.

29.

コンパクトな台をもつ超関数の Fourier 変換 Paley-Wiener の定理

f を $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ連続関数とする．$\zeta \in \mathbf{C}_n$ ($\mathbf{C}_n$ は $\mathbf{C}^n$ の双対[1]) として

$$\hat{f}(\zeta) = \int f(x) \exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle)\, dx$$

とおくことができる[2]．

$\zeta = \xi + i\eta$ ($\xi, \eta \in \mathbf{R}_n$, $\mathbf{R}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の双対) と書くと，積分記号下の微分の規則に従えば，$f(\xi + i\eta)$ が $\mathbf{R}_{2n}$ において (ξ, η) の $\mathscr{C}^\infty$ 関数になることが容易にわかる．通例のように，$j = 1, \ldots, n$ について

$$\partial/\partial\bar{\zeta}_j = \frac{1}{2}(\partial/\partial\xi_j + i\partial/\partial\eta_j)$$

とおけば，$\hat{f}(\zeta)$ を定義する積分の被積分関数が n 個の方程式系 $\partial u/\partial\bar{\zeta}_j = 0$ の解だから，$\hat{f}$ も解になる．換言すれば，$\hat{f}$ は複素空間 $\mathbf{C}_n$ 全体で ζ の正則関数[3]，すなわち ζ の整関数である．次に，$\hat{f}$ が指数型関数になることを示そう．もう少し一般にしてコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の Radon 測度 μ の場合を考える（前の場合は $f(x)dx$ という特別の Radon 測度である）．次の補題を利用する．

補題 29.1. μ をコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の Radon 測度とし，その台を K で表わす．このとき，定数 $C > 0$ で存在して，すべての関数 $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n)$ に

1) $\mathbf{R}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の実双対 (real dual)，$\mathbf{C}_n$ は $\mathbf{C}^n$ の複素双対 (complex dual)．

2) supp f が有界でないときは，右辺の積分は一般には発散する．

3) 複素解析関数．

ついて

$$|\langle\mu,\ \phi\rangle| \leqslant C \sup_{x\in K}|\phi(x)| \tag{29.1}$$

が成り立つ.

証 明 $d(x,\ K) < 1/k$ となるような点 x の全体からなる集合を U_k で表わそう ($k = 1, 2, \ldots$; d はユークリッド距離). g_k を $\mathrm{supp}\,\mu$ の近傍で 1 に等しく，g_k の台は U_k に含まれるコンパクト集合になるような連続関数で，すべての x に対して $0 \leqslant g_p(x) \leqslant 1$ となるものとしよう. $g_k\mu = \mu$ が成り立つ. 他方，定数 $C > 0$ が存在して，台が U_1 に含まれるコンパクト集合になるようなすべての $\phi \in \mathscr{C}$ に対して

$$|\langle\mu,\ \phi\rangle| \leqslant C \sup_{x}|\phi(x)|$$

が成り立つ[1]. したがって，(29.1) を得るには，任意の $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^n)$ をとって $\phi = g_k\phi$ とおけばよい. 実際

$$|\langle\mu,\ \phi\rangle| = |\langle\mu,\ g_k\phi\rangle| \leqslant C \sup_{x}|g_k(x)\phi(x)| \leqslant C \sup_{x\in U_k}|\phi(x)|$$

となるから，$k \to +\infty$ として極限を考えれば求める不等式が得られる.

注意 29.1. $\mu = f(x)dx$ の場合には，上の不等式 (29.1) に表われる定数 C として，$C = \int|f(x)|dx$ としてよい.

(29.1) において $\phi(x) = \exp(-2i\pi\langle x,\ \zeta\rangle)$, $\zeta \in \mathbf{C}^n$ とおけば，ただちに

$$|\langle\mu,\ \exp(-2i\pi\langle x,\ \zeta\rangle)| \leqslant C \sup_{x\in K}\exp(2\pi\langle x,\ \eta\rangle),\ (\eta = \mathrm{I_m}\zeta) \tag{29.2}$$

を得る. これを $\mu = f(x)dx$ に適用すれば (注意 29.1 から),

$$|\hat{f}(\zeta)| \leqslant \|f\|_{L^1} \sup_{x\in \mathrm{supp}f}\exp(2\pi|\langle x,\ \eta\rangle|) \tag{29.3}$$

を得る. これはわれわれの主張：$\hat{f}$ は指数型の整関数 (定義 22.2) になることを示している. $\xi \in \mathbf{R}_n$ に対しては，$\hat{f}(\xi)$ は f の Fourier 変換である. したがって次のことが証明されたことになる：《コンパクトな台をもつ連続関数の Fourier 変換は，複素空間 $\mathbf{C}_n$ 上に指数型整関数として延長することができる》.

この章では，上述の結果をコンパクトな台をもつ任意の超関数にまで拡張す

1) これは Radon 測度の定義による (21 章参照).

る．また，その逆も証明する．すなわち：その Fourier 変換が複素空間上に指数型整関数として延長できるような緩増大超関数はコンパクトな台をもつことである (実際には少し弱い形で証明する；すなわち (29.3) を拡張した形で，あたえられた超関数の Fourier 変換の実空間 $\mathbf{R}_n$ に平行な多様体上の増大度を既知として扱うのである)．Paley-Wiener の定理として知られるこの結果と解析的汎関数の Fourier-Borel 変換に関する定理 (定理 22.3) の類似性は明らかであろう．($\mathbf{C}_n$ 上の) 整関数を実空間 $\mathbf{R}_n$ へ制限する写像を j とすれば，j は $H(\mathbf{C}_n)$ から $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}_n)$ への 1 対 1 の写像である．1 対 1 になるのは，整関数が $\mathbf{R}_n$ 上で恒等的に 0 になれば $\mathbf{C}_n$ 上でも恒等的に 0 になってしまうからである．さらに，j の像は，定理 15.1 の系によって，稠密である．したがって，j の転置 ${}^tj : \mathcal{E}'(\mathbf{R}_n) \to H'(\mathbf{C}_n)$ はコンパクトな台をもつ超関数の空間から解析的汎関数の空間への連続単射となる (空間は共に強双対位相を備えいるとする)．そこで T を $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ任意の超関数として，$\mathcal{F}T$ をその Fourier 変換，$\mathcal{FB}T$ をその Fourier-Borel 変換とする．これらは共に $\mathbf{C}_n$ 上の整関数であり，それぞれ次式で定義される ($\mathcal{F}T$ については直ぐ後に証明する)．

$$\mathcal{F}T(\zeta) = \langle T_x, \exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle)\rangle; \quad \mathcal{FB}T(\zeta) = \langle ({}^tjT)_z, \exp(\langle z, \zeta\rangle)\rangle.$$

これからただちに，$\mathcal{F}T(\zeta) = \mathcal{FB}T(-2i\pi\zeta)$ を得る．

命題 29.1. コンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の超関数 T の Fourier 変換は次式で定義される $\mathbf{R}_n$ 上の関数になる．

$$\hat{T}(\xi) = \langle T_x, \exp(-2i\pi\langle x, \xi\rangle)\rangle \tag{29.4}$$

$\hat{T}$ は複素空間 $\mathbf{C}_n$ 上の次式で定義される整関数に延長できる．

$$\hat{T}(\zeta) = \langle T_x, \exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle)\rangle \tag{29.5}$$

証明　等式 (29.4) は種々の方法で証明することができる．たとえば，(29.4) が $T \in \mathcal{E}_c^\infty$ のとき正しいことを注意しておいて，$T \notin \mathcal{E}_c^\infty$ のときには $\mathcal{E}'$ において T に収束するような $\mathcal{E}_c^\infty$ の関数の列 (定理 28.2) を利用して極限をとればよい．あるいは，T がコンパクトな台をもつ連続関数の導関数の有限和で表現

できることを利用してもよい．第三の方法は $\mathcal{F}T$ の定義から直接に導く証明である．

次に，$\zeta \mapsto (x \mapsto \exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle))$ は $\zeta \in \mathbf{C}_n \cong \mathbf{R}_{2n}$ の $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n{}_x)$ に値をとる $\mathcal{E}^\infty$ 関数であることに注意しよう．ゆえに (29.5) は意味をもち（これは明らかに (29.4) の延長になっている），定理 27.1 によって，$\mathbf{R}_{2n}$ 上の $\mathcal{E}^\infty$ 関数になる．これに Cauchy-Riemann 作用素 $\partial/\partial\bar{\zeta}_j$ $(j=1,\ldots,n)$ を施せば，再び定理 27.1（ここでは定理の (b) の部分）を用いて，$\widehat{T}$ がいたるところ正則であることがわかる．(証終).

定理 22.3 は解析的汎関数を支持する多重円板の大きさとその汎関数の Fourier-Borel 変換の増大度の関係についての情報をあたえるものであった．同様に，評価式 (29.3) は f の Fourier 変換の実空間と平行な多様体上の増大度と f の台との間の関係を示していることに注意しよう．

次の定義は一層精密な取り扱いに役立つ．

定義 29.1. A を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする．A の**指示関数** (indicator) とは，$\mathbf{R}_n$ 上で定義される関数

$$\eta \mapsto I_A(\eta) = \sup_{x \in A} |\langle x, \eta\rangle|$$

のことをいう．

注意 29.2. A が局所凸 TVS の部分集合のときには上と同様の関数 I_A を E の双対 E' 上で定義することができる．このとき，集合 $\{x' ; I_A(x') \leqslant 1\}$ が A の極集合 A^0 である．明らかに $I_A = I_{\Gamma(A)}$ がなり立つ．ここで $\Gamma(A)$ は A の閉凸平衡包である．“スカラー体が実数体のときには，平衡的とは対称で原点に関して星形のことである.” さらに B が凸のときには，平衡的とは $B = -B$ のこととなる．

定義 29.1 を用いれば，(29.2) は次のように書き直される．

(29.6) $\quad |\langle \mu, \exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle)\rangle| \leqslant C\exp(2\pi I_K(\eta)), \ (\zeta \in \mathbf{C}^n, \ \eta = \mathrm{I_m}\zeta).$

(L. Hörmander に従って) Paley-Wiener の定理の $\mathcal{E}^\infty$ 関数に関する部分の証

明から始める.

定理 29.1. Kを$\mathbf{R}^n$のコンパクトな凸平衡部分集合とする. 超関数 $\phi \in \mathscr{S}'$ に関する次の二つの条件は同値である.

(a) ϕは$\mathscr{E}^\infty$関数で, その台はKに含まれる.

(b) ϕの Fourier 変換は複素空間$\mathbf{C}_n$上に整解析関数$\zeta \mapsto \widehat{\phi}(\zeta)$として延長できて, 各整数 $m=0, 1, \ldots$ に対して定数 $C_m > 0$ が存在して, すべての $\zeta=\xi+i\eta$ について

$$|\widehat{\phi}(\zeta)| \leqslant C_m(1+|\zeta|)^{-m} \exp\{2\pi I_K(\eta)\} \tag{29.7}$$

が成り立つ. ただしI_KはKの指示関数である.

証　明 (a)から(b)の出ることを示すには, (29.4)において $\mu=\psi(x)\,dx$, $\psi(x)=(1-\Delta/4\pi^2)^k\phi(x)$, $2k \geqslant m$ として見ればよい. そのとき, $\widehat{\psi}(\zeta)=(1+|\zeta|^2)^k\widehat{\phi}(\zeta)$ となるからである[1)].

次に(b)から(a)の出ることを示そう. $\operatorname{supp}\phi$が凸平衡コンパクト集合Kに含まれることを言うには, $\operatorname{supp}\phi$がKを含む任意の多面体Πに含まれることを言えばよい(命題18.2の系). Πは次の形をしているとしてよい.

$$\Pi=\{x \in \mathbf{R}^n\,;\, |\langle x, N_j\rangle| \leqslant 1,\ j=1, \ldots, n\}$$

ここで$N_1, \ldots, N_n$は$\mathbf{R}_n$の一つの基底をなすとする. このような多面体を考えることにして, $\mathbf{R}^n$の座標として汎関数$x \mapsto \langle N_j, x\rangle$を考え, これを$x_j$と書こう$(j=1, \ldots, n)$. $\mathbf{R}_n$では, この双対座標を用いることにする. すなわち, $\xi \in \mathbf{R}_n$の座標ξ_jは$\sum_{j=1}^n \xi_j N_j=\xi$となるものを採用する. この座標は$\mathbf{C}_n$にまで延長して用いる. 座標$(x_j)$, (ξ_j)によってそれぞれ空間$\mathbf{R}^m$および$\mathbf{R}_n$にノルム$|x|$, $|\xi|$を定義し, また Lebesgue 測度dx, $d\xi$を考える. Lebesgue 測度は単位(超)立方体の測度を1にするように定める. さて, $\eta \in \mathbf{R}_n$とすれば,

1) $\zeta=\xi \in \mathbf{R}_n$ならこれでよいが, $\zeta \in \mathbf{C}^n$のときには工合が悪い. そのときには, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$ に対して $\mu_\alpha=\phi_\alpha(x)\,dx$, $\phi_\alpha(x)=(2\pi)^{-|\alpha|}(\partial/\partial x)^\alpha\phi(x)$ として(29.4)に入れると, $\widehat{\phi}_\alpha(\zeta)=\zeta^\alpha\widehat{\phi}(\zeta)$ だから, $|\zeta^\alpha|\widehat{\phi}(\zeta)| \leqslant C_\alpha \exp(2\pi I_K(\eta))$ を得る. これを加えれば $(\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\zeta^\alpha|)|\widehat{\phi}(\zeta)| \leqslant C_m' \exp(2\pi I_K(\eta))$ となるが, $C_m''\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\zeta^\alpha| \geqslant (1+|\zeta|)^m$ なるC_m''があるから, $C_m'C_m''=C_m$とおけば(29.7)を得る.

$|\langle x, \eta\rangle| = \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j$ の Π における上限は $x_j = \operatorname{sgn}\eta_j$ $(j=1,\dots,n)$ として得られ，その上限の値は

$$I_\Pi(\eta) = \sum_{j=1}^{n} |\eta_j| \tag{29.8}$$

に等しい．ところで，$K \subseteq \Pi$ だから，すべての $\eta \in \mathbf{R}_n$ について $I_K(\eta) \leqslant I_\Pi(\eta)$ であるが，(b) から (a) が出ることは $K = \Pi$ のときに証明すれば十分なのだから，$I_K(\eta)$ が (29.8) であたえられるとしてよい．

まず Cauchy の公式 (上巻 111 頁) を用いれば，$\hat{\phi}$ の各階の導関数 $\hat{\phi}^{(p)}(p \in \mathbf{N}^n)$ もまた不等式 (29.7) を満たすことがわかる；ただし定数 C_m は異なるかも知れない (実際これは p に依存する)．この事実から，$\zeta = \xi$ を実とすれば，すなわち $\eta = 0$ とすることにより，各関数 $|\hat{\phi}^{(p)}(\xi)|$ はすべて無限遠において $1/|\xi|$ のどんな巾よりも速く減少することがわかる．換言すれば，$\hat{\phi}$ は $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ に属すから，$\phi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ となりまた逆転公式 (定理 25.1)

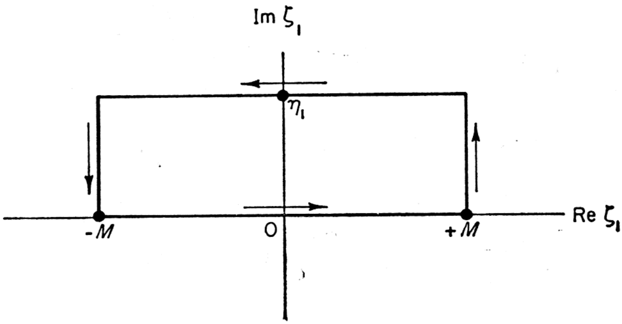
$$\phi(x) = \int \exp(2i\pi\langle x, \xi\rangle)\hat{\phi}(\xi)\,d\xi$$

を得る．さて，複素数 $\zeta_2,\dots,\zeta_n$ を固定して，次の積分を考察しよう．

$$\int_{-M}^{M} \exp(2i\pi x_1\xi_1)\hat{\phi}(\xi_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\,d\xi_1. \tag{29.9}$$

$\hat{\phi}$ は整関数だから，いま ζ_1 だけの関数とみて，複素平面において次の道 Γ に沿って積分することができる．

Γ は閉曲線だから，Cauchy の定理によって，この積分は 0 に等しい．とこ



ろで，実直線上の線分 $(-M, +M)$ に沿った積分は (29.9) に等しく，したがってまた，次のものに等しい．

$$\int_{-M}^{M} \exp(2i\pi(\xi_1+i\eta_1)x_1)\hat{\phi}(\xi_1+i\eta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\,d\xi_1 + R(M).$$

ただし

$$|R(M)| \leqslant \int_0^{\eta_1} \exp(2\pi|x_1 t|)\{|\hat{\phi}(M+it, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| + |\hat{\phi}(-M+it, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|\}\,dt.$$

ここで (29.7) の $m=1$ の場合を用いれば，$M\to+\infty$ のとき $R(M)\to 0$ となることが直ちにわかる．換言すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi(\xi_1+i\eta_1)x_1)\hat{\phi}(\xi_1+i\eta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\,d\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2i\pi\xi_1 x_1)\hat{\phi}(\xi_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\,d\xi_1.$$

この議論を各変数 $\xi_1, \dots, \xi_n$ に順次適用することにより，次式

$$\int_{\mathbf{R}^n} \exp(2i\pi\langle\xi+i\eta, x\rangle)\hat{\phi}(\xi+i\eta)\,d\xi = \phi(x)$$

の成り立つことがわかる．ここで η は $\mathbf{R}_n$ の任意のベクトルである．

そこで再び (29.7) における $m=n+1$ の場合を適用すれば

$$|\phi(x)| \leqslant C_{n+1}\exp(2\pi(|\eta_1|+\cdots+|\eta_n|-\langle x, \eta\rangle)) \times \int (1+|\xi|)^{-n-1}\,d\xi$$

を得る．この式において $\eta_j=\tau x_j$, $\tau>0$, $\eta_K=0$ $(k\neq j)$ とおいてみる ($j=1, 2, \dots, n$) と，次式を得る．

$$|\phi(x)| \leqslant (\text{定数})\times\exp(2\pi\tau(1-|x_j|)|x_j|)$$

したがって，もし $|x_j|>1$ ならば，$\tau\to+\infty$ として $\phi(x)=0$ を得る．すなわち，$\operatorname{supp}\phi$ は集合 Π に含まれている．(証終)．

次に (L. Schwartz にしたがって) Paley-Wiener の定理の緩増大超関数への拡張を証明しよう．

定理 29.2. $\mathbf{R}^n$ 上の緩増大超関数 T についての次の二つの条件は同値である．

(a′) T の台はコンパクトであり，その平衡凸包は集合 K に等しい．

(b′) T の Fourier 変換は複素空間 $\mathbf{C}_n$ 上の整関数 $\zeta \mapsto T(\zeta)$ 拡張にできて，次の性質をもつ．すなわち，整数 $m \geqslant 0$ と定数 $C > 0$ が存在して，すべての $\zeta = \xi + i\eta$ について次の不等式が成り立つ．

(29.10) $$|\hat{T}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^m \exp\{2\pi I_K(\eta)\}.$$

(a′) ⇒ (b′) の証明 $x_1, \dots, x_n$ を $\mathbf{R}^n$ の座標とし，$\xi_1, \dots, \xi_n$ を $\mathbf{R}_n$ における双対座標とする．座標系に随伴する $\mathbf{R}^n$ および $\mathbf{R}_n$ 上の Hilbert 空間構造 ($\mathbf{R}^n$ および $\mathbf{R}_n$ における内積，たとえば $(\xi|\xi') = \sum_{j=1}^n \xi_j \xi_j'$) を利用する．したがって，直交変換の概念が意味をもつ．それは内積（したがってノルム）を保存する線形変換である．さて，集合 K を含む多面体

$$\Pi = \{x \in \mathbf{R}^n \,;\, |\langle x, N_1\rangle| \leqslant B_1, \dots, |\langle x, N_n\rangle| \leqslant B_n\}$$

を考えよう (定理 29.1 の証明参照)．ここで $N_1, \dots, N_n$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底とする ($B_1, \dots, B_n$ は正数)．T の台はコンパクトだから，整数 $m \geqslant 0$ と定数 $A > 0$ が存在して，すべての $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ について

(29.11) $$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant A \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sum_{|p| \geqslant m} |(\partial/\partial x)^p \phi(x)|$$

が成り立つ．そこで，$g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^1)$ を $(-\infty, 1/2)$ では 1 に等しく，$(1, +\infty)$ では 0 に等しい関数として，

$$\phi(x) = \exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle) \prod_{j=1}^n g(|\zeta|(|\langle x, N_j\rangle| - B_j))$$

とおけば，ϕ は $\mathbf{R}^n$ において $\mathcal{C}^\infty$ であり，その台は集合

$$\Pi_\zeta = \{x \,;\, |\langle x, N_j\rangle| < B_j + |\zeta|^{-1},\ j = 1, \dots, n\}$$

に含まれる．また，この関数は $\Pi_{2\zeta}$ において $\exp(-2i\pi\langle x, \zeta\rangle)$ に等しい．$\Pi_{2\zeta}$ は Π の近傍であり，したがって K の近傍であるから，$\operatorname{supp} T$ の近傍である．したがって，(29.11) と命題 29.1 から

$$|\hat{T}(\zeta)| = |\langle T, \phi\rangle| \leqslant A_1(1+|\zeta|)^m \sup_{x \in \Pi_\zeta} \exp(2\pi|\langle x, \eta\rangle|), \quad (\eta = I_m\zeta)$$

ここで定数 A_1 は (29.11) における整数 m と定数 A にしか関係せず，正規直交基底 $(N_1,\dots, N_n)$ および数 $B_1,\dots, B_n$ には依らないことに注意することが重要である．$B_1,\dots, B_n$ に関係しないことは明白であり，したがって $\mathbf{R}_n$ における直交変換を考えれば $(N_1,\dots, N_n)$ に依らないことも明らかである．かくして，次式を得る．

$$|\widehat{T}(\zeta)| \leqslant A_1(1+|\zeta|)^m \exp(2\pi I_\Pi(\eta)+2\pi\sqrt{n}),$$

何故なら，

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Pi_\zeta}|\langle x, \eta\rangle| &\leqslant \sup_{x\in\Pi}|\langle x, \eta\rangle|+(|(N_1|\eta)|+\cdots+|(N_n|\eta)|)|\zeta|^{-1}\\ &\leqslant I_\Pi(\eta)+\sqrt{n}\end{aligned}$$

だからである．かくして次式を得る．

$$|\widehat{T}(\zeta)| \leqslant A_1 \exp(2\pi\sqrt{n})(1+|\zeta|)^m \exp(2\pi I_\Pi|\eta|),\quad \zeta\in\mathbf{C}^n.$$

この不等式は上に述べたようなすべての多面体 Π に対して成り立つから，右辺において $\inf \Pi$ を考えても成り立つ．ところで

$$\inf_{\Pi} I_\Pi(\eta) = I_K(\eta)$$

となることは容易にわかるから，これで証明できたことになる．

(b′) ⇒ (a′) の証明　この証明は標準的な正則化と定理 29.1 に基礎をおく．$\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ を通例の**軟化作用素** (molifier) としよう (補題 28.1 参照)．任意の $\varepsilon>0$ に対して，合成積 $\rho_\varepsilon * T$ もまた緩増大超関数であり，その Fourier 変換は $\hat{\rho}_\varepsilon\widehat{T}$ に等しいことはただちにわかる (定理 30.4 参照，直接に検証することは容易である)．また

$$\hat{\rho}_\varepsilon(\zeta)=\hat{\rho}(\varepsilon\zeta)$$

となることにも注意しよう．ρ の台は球 $\{x\,;|x|\leqslant 1\}$ に等しいから，(29.7) を適用することにより，各 $k=0, 1,\dots$ について

$$|\hat{\rho}_\varepsilon(\zeta)| \leqslant C_k(1+|\varepsilon\zeta|)^{-k}\exp(2\pi\varepsilon|\eta|)$$

が成り立つ．そこで (29.10) を考慮すれば

$$|\hat{\rho}_\varepsilon(\zeta)\widehat{T}(\zeta)| \leqslant CC_k\varepsilon^{-k}(1+|\zeta|)^{-(k-m)}\exp(2\pi(I_K(\eta)+\varepsilon|\eta|))$$

を得る．これは，$\rho_\varepsilon * T$ の Fourier 変換が定理 29.1 の条件 (b) を，$I_K(\eta)$ の代

りに $I_K(\eta)+\varepsilon|\eta|$ として，満たしていることを示している．$I_K(\eta)+\varepsilon|\eta|$ は集合 $K_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^n\,;\,d(x,K)\leqslant\varepsilon\}$ (d はユークリッド的距離) の指示関数だから，$\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * T)\subseteq K_\varepsilon$ を得る．

$\varepsilon\to 0$ とすれば $\rho_\varepsilon * T\to T$ となる (定理 28.2 の証)．$\varepsilon<1$ のときには $\rho_\varepsilon * T$ の台は K_1 に含まれるから，$\operatorname{supp} T$ も K_1 に含まれ，したがって $\operatorname{supp} T$ はコンパクトである．最後に，$\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * T)$ は $\operatorname{supp} T$ に収束する (再び定理 28.2 の証) から

$$\operatorname{supp} T\subseteq\bigcap_{\varepsilon>0}K_\varepsilon=K$$

を得る (証終)．

演 習 問 題

29. 1. コンパクトな台をもつ超関数 T であって，次の性質をもつものの例を挙げよ．T は Radon 測度ではなく，Fourier 変換 $\widehat{T}$ は $\mathbf{C}_n$ 上の整関数に延長できて，或る定数 $C, B>0$ とすべての $\zeta\in\mathbf{C}_n$ に対して，$|\widehat{T}(\zeta)|\leqslant C\exp(B|\zeta|)$ となる．(ヒント：演習問題 25. 13, 25. 14 と $\mathcal{E}_c^\infty$ の関数による乗法を用いよ[1]．)

29. 2. $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ超関数で，その Fourier 変換が，すべての $\varepsilon>0$ に対して，指数型 $(\varepsilon,\dots,\varepsilon)$ (定義 22. 2) の整関数となるものの特徴づけをせよ．$\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数であって，その Fourier-Borel 変換が，すべての $\varepsilon>0$ に対して，指数型 $(\varepsilon,\dots,\varepsilon)$ の整関数となるが，コンパクトな台をもつ超関数とはならない例を挙げよ．

29. 3. Paley-Wiener の定理を用いて次のことを示せ．$P(\partial/\partial x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の定数係数の微分作用素 (恒等的には 0 でない) とするとき，方程式 $P(\partial/\partial x)u=0$ の解は，コンパクトな台をもつ超関数の空間 $\mathcal{E}'$ においては，$u=0$ しかない．

29. 4. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A に対して，各 $\eta\in\mathbf{R}_n$ について

$$I'_A(\eta)=\sup_{x\in A}\langle\eta,x\rangle$$

とおく．また，$A'=\{\eta\in\mathbf{R}_n\,;\,I'_A(\eta)\leqslant 1\}$，$A''=\{x\in\mathbf{R}^n\,;\,\sup_{\eta\in A'}\langle\eta,x\rangle\leqslant 1\}$ とおく．このとき，A' は凸集合であること，A'' は A の凸包になること，$I'_{A''}=I'_A$ なることを証明せよ．

29. 5. K を $\mathbf{R}^n$ のコンパクト凸集合とする．このとき，$\mathbf{R}^n$ 上の緩増大超関数 T に対す

---

1) もっと簡単に Dirac の δ の導関数を用いてもわかる．

る次の 2 条件は同値であることを証明せよ．

(a)　T の台は集合 K に含まれる；

(b)　T の Fourier 変換は次の性質をもつ $\mathbf{C}^n$ 上の整関数 $\widehat{T}(\zeta)$ に延長できる．すなわち，定数 $C,\ m>0$ が存在して，すべての $\zeta\in\mathbf{C}^n$ について

$$|\widehat{T}(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^m\exp\{2\pi I'_K(\mathrm{Im}\,\zeta)\}.$$

30.

合成積と乗法積の Fourier 変換

S, T をコンパクトな台をもつ二つの超関数とすれば，その合成積 $S*T$ の台もまたコンパクトであり，命題 29.1. によって，$S*T$ の Fourier 変換は関数

$$\alpha \mapsto \langle (S*T)_y, \exp(-2i\pi\langle x, y\rangle)\rangle$$

に等しい．コンパクトな台をもつ二つの超関数の合成積の定義（定義 27.3）によって，

$$\begin{aligned}\langle (S*T)_y, \exp(-2i\pi\langle x, y\rangle)\rangle &= \langle S_y, \langle \check{T}_\eta, \exp(-2i\pi\langle x, y-\eta\rangle)\rangle\rangle \\ &= \langle S_y, \langle T_\eta, \exp(-2i\pi\langle x, y+\eta\rangle)\rangle\rangle \\ &= \langle S_y, \exp(-2i\pi\langle x, y\rangle)\langle T_\eta, \exp(-2i\pi\langle x, \eta\rangle)\rangle\rangle \\ &= \langle S_y, \exp(-2i\pi\langle x, \eta\rangle)\rangle\langle T_\eta, \exp(-2i\pi\langle x, \eta\rangle)\rangle.\end{aligned}$$

したがって，

$$\mathscr{F}(S*T) = \mathscr{F}S\,\mathscr{F}T \tag{30.1}$$

が成り立つ．ここで両辺ともに解析関数であることに注意しよう（定理 29.2）．

この関係式は，S と T が $\mathbf{R}^n$ 上の二つの L^1 関数であるときにも成立するものであった．そのときには $S*T$ もまた L^1 関数であった（定理 26.1 の系 3）．L^1 関数の Fourier 変換は $\mathbf{R}_n$ 上の連続関数であり，無限遠で 0 に収束する（定理 25.3）．したがって (30.1) の両辺が意味をもった．

等式 (30.1) が成立する範囲を種々の方向に拡張することは難しいことではない．この章では合成積の因子の一つ，たとえば S が任意の緩増大超関数である場合を考察する．このとき，T がコンパクトな台をもつ超関数とすれば，$S*T$ も $\mathscr{F}S\mathscr{F}T$ も共に緩増大超関数になることは容易にわかる．ところで，

T がコンパクトな台をもつという条件もゆるめることができる．S の無限遠における増大度がゆるいから，T の無限遠における減少度が $1/|x|$ の任意の巾よりも速いということが‘ある意味で’みたされていればよい[1]．同様のことが (30.1) の右辺についてもいえる．$\mathscr{F}S$ は任意の緩増大超関数だから（これは $\mathscr{F}: \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ が上への同形写像だから），$\mathscr{F}S\mathscr{F}T \in \mathscr{S}'$ となるためには，$\mathscr{F}T$ が無限遠で緩増大な $\mathscr{C}^\infty$ 関数（すなわち，$\mathscr{F}T$ のすべての導関数が無限遠で緩増大な $\mathscr{C}^\infty$ 関数）でなければならない．これは丁度，$\mathscr{F}T$ がすでに導入した関数空間 $\mathscr{O}_M$（定義 25.3；定理 25.5 参照）の元であることを意味する．これらの事情を明確にしよう．

定義 30.1. 次の性質 (30.2) をもつ超関数全体がなす空間を $\mathscr{O}'_C$ で表わす．

(30.2) 任意の整数 $h \geqslant 0$ に対して，次の性質をもつ $\mathbf{R}^n$ の連続関数の有限族 $\{f_p\}$ $(p \in \mathbf{N}^n, |p| \leqslant m(h))$ が存在する．すなわち

$$T = \sum_{|p| \leqslant m(h)} (\partial/\partial x)^p f_p$$

かつ，任意の $p \in \mathbf{N}^n, |p| \leqslant m(h)$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} (1+|x|)^h |f_p(x)| = 0.$$

文字 $\mathscr{O}$ は作用素 (operators) に，添字 C は合成積 (convolution) に由来する．（ダッシュがついているのは，関数ではなくて超関数を取り扱っていることを意味する）．明らかに，$\mathscr{O}'_C$ の元はすべて緩増大超関数である（定理 25.4 参照）．$\mathscr{O}'_C$ の元は，しばしば**無限遠において急減少な超関数** (distributions rapidly decreasing at infinity) とよばれる．

$\mathscr{O}'_C$ の元の例

30.1. 無限遠で急減少な（すなわち，無限遠で $1/|x|$ のどんな巾よりも速く減少する）連続関数，とくに $\mathscr{S}$ に属する任意の関数 φ.

30.2. コンパクトな台をもつ超関数.

30.3. 無限遠で急減少な連続関数の導関数の有限和．しかし注意すべきこと

1) これは単なる‘感覚的表現’にすぎない．数学的表現は後に示される．

は，この型の超関数が $\mathcal{O}'_C$ を尽さないことである．性質 (30.2) は，T が無限遠で急減少な連続関数の導関数の有限和になるということと同値ではない．性質 (30.2) において，整数 h が大きくなれば整数 $m(h)$ も一般には大きくなることに注意しよう．これに関連して，読者に次の演習問題を出しておく．

演習問題 30.1. 超関数 $e^{i|x|^2}$，すなわち

$$\mathcal{C}_c^\infty \ni \varphi \mapsto \int e^{i|x|^2}\varphi(x)\,dx$$

は $\mathcal{O}'_C$ に属する．

$\mathcal{O}'_C$ には位相を定義しないことにしよう (実は，自然な方法で導入できるのではあるが)．この空間を考えることの意味は，次の結果からわかるであろう．

定理 30.1. $T \in \mathcal{O}'_C$ とすれば，合成積写像

(30.3) $$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \mapsto (T*\varphi)(x) = \langle T_y,\, \varphi(x-y)\rangle$$

は $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ から $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ への写像となるが，これは $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ から自分自身の中への連続線形写像に拡張できる．

証　明　証明は真正直にやればよい．k を非負整数とし，$P(D)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の定数係数の微分作用素とする．h を整数 $\geqslant k+n+1$ とする．この h を用いて，(30.2) における T の表示を用いれば

$$P(D)(T*\varphi) = T*(P(D)\varphi) = \sum_{|p|\leqslant m(h)} f_p * [(\partial/\partial x)^p P(D)\varphi]$$

を得る．さて，q を $|q|\leqslant k$ となる任意の n-系に対して (26 章，演習問題 26.4 を見よ)，

$$x^q\{f_p * [(\partial/\partial x)^p P(D)\varphi]\} = \sum_{r\leqslant q}\binom{q}{r}(x^{q-r}f_p) * [x^r(\partial/\partial x)^p P(D)\varphi]$$

を得る．ここで $r\leqslant q$ は，いつものように，$r_1\leqslant q_1,\dots, r_n\leqslant q_n$ を意味する．$h\geqslant k+n+1$ としたことと，式

$$|f_p(x)| \leqslant C_p(1+|x|)^{-h}$$

から $x^{q-r}f_p \in L^1$ を得る．したがって (定理 26.1，系 2)，

$$\|(x^{q-r}f_p)*[x^r(\partial/\partial x)^pP(D)\varphi]\|_{L^\infty}\leqslant\sum_{|r|\leqslant k}\sum_{|p|\leqslant m(h)}\|x^r(\partial/\partial x)^pP(D)\varphi\|_{L^\infty}$$

を得る．これらの不等式を組合せれば，定数 $C>0$ が存在して，すべての $\varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\sum_{|q|\leqslant k}\|x^qP(D)(T*\varphi)\|_{L^\infty}\leqslant C\sum_{|r|\leqslant k}\sum_{|p|\leqslant m(h)}\|x^r(\partial/\partial x)^pP(D)\varphi\|_{L^\infty}$$

を得る．これから定理の主張は直ちに出る．

定義 30.2. $T\in\mathcal{O}'_C$ とするとき，緩増大超関数 S に対して，$S*T$ または $T*S$ によって，$\mathscr{S}$ から $\mathscr{S}$ への連続線形写像 $\varphi\mapsto\check{T}*\varphi$ の転置による S の像を示す．

ここで $\check{T}*\varphi$ は，写像 (30.3) [において T の代りに $\check{T}$ とした] の $\mathscr{S}$ への拡張による φ の像である．$\check{T}$ は

$$C_c^\infty\ni\varphi\mapsto\langle\check{T},\varphi\rangle=\langle T,\check{\varphi}\rangle,\ \check{\varphi}(x)=\varphi(-x)$$

によって定義される超関数であったことを思い出そう．ここで幾つかの検証すべき点がある．たとえば，S, T ともに $\mathcal{O}'_C$ に属するときに，$\varphi\mapsto\check{T}*\varphi$ の転置による S の像と $\varphi\mapsto\check{S}*\varphi$ の転置による T の像が一致することを示さねばならない．これは，条件 (30.2) を用いて，容易に検証できる．緩増大超関数の構造定理を用いれば，次の定理 (緩増大超関数の正則化) を証明することはやさしい．

定理 30.2. $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, $S\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ とするとき，合成積 (定義 30.2) は無限遠において緩増大な $\mathscr{C}^\infty$ 関数 (すなわち $\in\mathcal{O}_M$)：

$$x\mapsto\langle S_y,\varphi(x-y)\rangle$$

に等しい．

また，緩増大超関数の構造定理を用いれば，$S\in\mathscr{S}$ と $T\in\mathcal{O}'_C$ の合成積を [次のように] 定義することもできる．

$$S=\sum_{|p|\leqslant m}(\partial/\partial x)^pg_p$$

と表わしておく．ここで g_p は連続関数であって，適当な整数 $k \geqslant 0$ に対して，すべての $x \in \mathbf{R}^n$ について

$$|g_p(x)| \leqslant C(1+|x|)^k, \qquad p \in \mathbf{N}^n, \qquad |p| \leqslant m$$

を満たすものである．T については，$h \geqslant k+n+1$ として，性質 (30.2) における表現をえらぶ．そうすれば，

$$S*T = \sum_{|p|\leqslant m} \sum_{|q|\leqslant m(h)} (\partial/\partial x)^{p+q}(g_p * f_q) \tag{30.4}$$

と書くことができる．

$$(g_p * f_q)(x) = \int g_p(x-y) f_q(y)\,dy$$

となり，$g_p * f_q$ は連続関数になること，また

$$\begin{aligned}|(g_p * f_q)(x)| &\leqslant C \int (1+|x-y|)^k |f_q(y)|\,dy \\ &\leqslant C(1+|x|)^k \int (1+|y|)^k |f_q(y)|\,dy \\ &\leqslant C_1(1+|x|)^k \int (1+|y|)^{k-h}\,dy \\ &\leqslant C_2(1+|x|)^k\end{aligned}$$

($h \geqslant k+n+1$ を用いた) となることも容易にわかる．
これは，$g_p * f_q$ が無限遠で緩増大であり，したがって，(30.4) であたえられる $S*T$ が緩増大超関数であることを示している．

次に Fourier 変換に話をもどそう．$\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}'_C$ はともに $\mathcal{S}'$ の線形部分空間であることに注意しよう．したがって，これらの空間に属する超関数に対しては，Fourier 変換は定義されている．このとき，次の結果が成り立つ．

定理 30.3. Fourier 変換は $\mathcal{O}'_C$ を $\mathcal{O}_M$ の上に写し，$\mathcal{O}'_C$ を $\mathcal{O}_M$ の上に写す 1 対 1 の線形写像である．

証 明 定理を証明するには，$\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}'_C$ を $\mathcal{O}_M$ の中に写し，$\mathcal{O}_M$ を $\mathcal{O}'_C$ の中に写すことを示せば十分である．なぜなら，$\mathcal{F}$ の $\mathcal{S}'$ における逆写像 $\bar{\mathcal{F}}$ もまた

明らかに同じ性質をもつことが簡単にわかるからである[1].

$T \in \mathcal{O}'_C$ として，性質 (30.2) における表現を用いよう．

$$T = \sum_{|p| \leqslant m(h)} (\partial/\partial x)^p f_p$$

これから T の Fourier 変換 $\widehat{T}$ を計算すれば

$$\sum_{|p| \leqslant m(h)} (2i\pi\xi)^p \widehat{f}_p(\xi)$$

ここで

$$\widehat{f}_p(\xi) = \int \exp(-2i\pi\langle x, \xi\rangle) f_p(x)\, dx$$

である．k を任意の整数として，$h \geqslant k+n+1$ なるようにえらび，$q \in \mathbf{N}^n$, $|q| \leqslant k$ とする．そうすれば，$\widehat{f}_p$ は積分記号下で q 回[2] 微分できる．かくして

$$|(\partial/\partial\xi)^q \widehat{f}_p(\xi)| \leqslant \int |(2\pi x)^q||f_p(x)|dx$$

$$\leqslant \int (2\pi|x|)^{|q|}(1+|x|)^{-h} dx$$

を得る．これから，$\widehat{f}_p$ が $\mathcal{E}^k(\mathbf{R}_n)$ に属することが容易に出る．したがって $\widehat{T} \in \mathcal{E}^k(\mathbf{R}_n)$. k は任意だったから，これは $\widehat{T}$ が $\mathcal{E}^\infty$ 関数であることを意味する．さらに，$\widehat{f}_p$ の k 階以下の導関数はすべて有界な関数であることから，すべての $q \in \mathbf{N}^n$, $|q| \leqslant h$ に対して，不等式

$$|(\partial/\partial\xi)^q \widehat{T}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m(h)}$$

がすべての $\xi \in \mathbf{R}_n$ と ξ に独立な定数 $C>0$ について成り立つ．これは $\widehat{T} \in \mathcal{O}_M$ を示している．

今度は，$\alpha \in \mathcal{O}_M$ としよう．任意の整数 $h \geqslant 0$ に対して，整数 $m(h) \geqslant 0$ と定数 $C>0$ が存在して，すべての x について

$$\sum_{|q| \leqslant h} |(\partial/\partial x)^q \alpha(x)| \leqslant C(1+|x|^2)^m$$

が成り立つ．このとき

(30.5) $$\beta(x) = (1+|x|^2)^{-m-n-1}\alpha(x)$$

---

1) 丁寧にやるには，$\overline{\mathcal{F}}$ についても同じことを示せばよい．読者に委せる．

2) すなわち，$(\partial/\partial\xi)^q$ を施すことができる．

とおけば，簡単な計算から，定数 $C'>0$ が存在して，すべての $x\in\mathbf{R}^n$ について

$$\sum_{|q|\leqslant h}|(\partial/\partial x)^q\beta(x)|\leqslant C'(1+|x|^2)^{-n-1} \tag{30.6}$$

が成り立つことがわかる．β の Fourier 変換を $\hat{\beta}$ とすれば，

$$(2i\pi\xi)^q\hat{\beta}(\xi)=\int\exp(-2i\pi\langle x,\,\xi\rangle)(\partial/\partial x)^q\beta(x)\,dx$$

を得る．これと (30.6) から

$$(1+|\xi|)^h|\hat{\beta}(\xi)|\leqslant C''\int(1+|x|^2)^{-n-1}dx=C'''.$$

ところで，関係式 (30.5) は

$$\hat{\alpha}=\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{m+n+1}\hat{\beta}$$

を意味するから，これは $\hat{\alpha}\in\mathcal{O}'_C$ を意味する (証終).

さて，この章の始めに述べた等式 (30.1) の拡張を証明しよう．

定理 30.4. $S\in\mathscr{S}'$，$T\in\mathcal{O}'_C$，$\alpha\in\mathcal{O}_M$ とすれば，次の等式が成り立つ．

$$\mathscr{F}(S*T)=\mathscr{F}S\,\mathscr{F}T \tag{30.7}$$

$$\mathscr{F}(\alpha S)=\mathscr{F}\alpha*\mathscr{F}(S) \tag{30.8}$$

証　明　(30.7) だけを証明すればよい．実際，そのときには，$\mathscr{F}$ の代りに $\overline{\mathscr{F}}$ としてもよいから[1]，

$$S*T=\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}}S\cdot\overline{\mathscr{F}}T)$$

を得るが，$\overline{\mathscr{F}}S$ を S で，$\overline{\mathscr{F}}T$ を α で置きかえてもよい．そうすれば，S が $\mathscr{F}S$ で，T が $\mathscr{F}\alpha$ で置きかわるから，(30.8) が得られる (定理 25.6 と 30.3 を用いた).

(30.7) を証明するために，次式を考察する．

$$\langle\mathscr{F}(S*T),\,\varphi\rangle=\langle S*T,\,\mathscr{F}\varphi\rangle=\langle S,\,\check{T}*(\mathscr{F}\varphi)\rangle.$$

ところで (定理 30.1 と 30.2 参照)

1)　前頁脚注参照.

$$[\check{T}*(\mathscr{F}\varphi)](x)=\langle T_y,\ (\mathscr{F}\varphi)(x+y)\rangle=\langle T_y,\ \int\exp(-2i\pi\langle x+y,\ \xi\rangle)\varphi(\xi)\,d\xi\rangle$$

だから，性質 (30.2) における T の表現で，$h\geqslant n+1$ として用いると

$$[\check{T}*(\mathscr{F}\varphi)](x)=\sum_{|p|\leqslant m(h)}\int f_p(y)\left\{\int\exp(-2i\pi\langle x+y,\ \xi\rangle)(2i\pi\xi)^p\varphi(\xi)\,d\xi\right\}dy.$$

ところで，ξ と y についての積分順序は交換してもよい．なぜなら，($h\geqslant n+1$ となるようにえらんだから) 関数 f_p はすべて可積分だからである[1]．そうすればただちに

$$\begin{aligned}[\check{T}*(\mathscr{F}\varphi)](x)&=\sum_{|p|\leqslant m(h)}\int\exp(-2i\pi\langle x,\ \xi\rangle)(2i\pi\xi)^p\hat{f}_p(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\\&=[\mathscr{F}((\mathscr{F}T)\cdot\varphi)](x)\end{aligned}$$

かくして，次式を得る

$$\langle\mathscr{F}(S*T),\ \varphi\rangle=\langle\mathscr{F}S,\ (\mathscr{F}T)\varphi\rangle$$

これはまさに証明すべきことであった．

等式 (30.7) および (30.8) を用いれば，次の諸公式は容易に導くことができる．ただし，$P(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ は複素数係数の任意の多項式，$a\in\mathbf{R}^n$ は任意のベクトル，S は $\mathbf{R}^n$ 上の任意の緩増大超関数とする．

(30.9) $$\mathscr{F}(P(\partial/\partial x)S)=P(2i\pi\xi)\mathscr{F}S\,;$$

(30.10) $$\mathscr{F}(P(x)S)=P\left(-\frac{1}{2i\pi}\partial/\partial\xi\right)(\mathscr{F}S)\,;$$

(30.11) $$\mathscr{F}(\tau_a S)=\exp(-2i\pi\langle a,\ \xi\rangle)(\mathscr{F}S).$$

これらの導出のためには，次のことに注意しさえすればよい．

$$P(\partial/\partial x)S=[P(\partial/\partial x)\delta]*S,\qquad \tau_a S=\delta_a*S.$$

演　習　問　題

30.2. 超関数 $e^{i|x|^2}$ の Fourier 変換を計算せよ．$e^{i|x|^2}$ は明らかに $\mathcal{O}_M$ に属するという事実から，$e^{i|x|^2}$ が $\mathcal{O}_C'$ に属することを導け (演習問題 30.1 参照)．このことから，$\mathcal{O}_M$ と $\mathcal{O}_C'$ の間の双対性を確立する自然な方法はないことを示せ．

---

1) すなわち，Fubini の定理による．

30. 3. $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数のなす空間を H', $\mathbf{C}^n$ 上の指数型整関数のなす空間を Exp, $\mathscr{F}$ を $H' \to \mathrm{Exp}$ なる Fourier-Borel 変換とする (定義 22.3). このとき，すべての対 $\mu, \nu \in H'$ に対し

$$\mu * \nu = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}\mu \cdot \mathscr{F}\nu)$$

とおけば，この星 "$*$" で表わされる合成法則 (これを解析的汎関数の**合成積** (convolution) とよぶ) に関して，H' は単位元をもつ可換環になることを証明せよ．また，(実空間への制限写像 $H(\mathbf{C}^n) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ を転置することによって) $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ を $H'(\mathbf{C}^n)$ に埋めこんだとき，H' における合成積は $\mathbf{R}^n$ 上のコンパクトな台をもつ超関数の合成積を誘導することを証明せよ．

整関数 $h \in H(\mathbf{C}^n)$ と解析的汎関数 $\mu \in H'(\mathbf{C}^n)$ の合成積 $h * \mu$ を定義し，その基本的諸性質を述べよ．

30. 4. 集合 $\mathbf{N}^n$ に離散位相を入れた空間を考えよう．$\mathbf{N}^n$ 上の複素数値関数でコンパクトな台をもつもの全体の空間を E, $\mathbf{N}^n$ 上のすべての複素数値関数のなす空間を F とする．E には，部分空間 E_m ($|p| > m$ なら 0 となる関数 $p \mapsto f(p)$ の空間) ($m = 0, 1, \ldots$) の帰納極限の位相を入れる．F の位相は $\mathbf{N}^n$ 上の各点収束の位相とする．このとき

$$u : f \mapsto \sum_{p \in \mathbf{N}^n} f(p)\chi^p$$

は明らかに F から $\mathscr{Q}_n$ (n 個の不定元 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ をもつ複素係数の形式的巾級数のなす Fréchet 空間) の上への TVS 同形写像である．この写像の E への制限 v は，E から $\mathscr{P}_n$ (すなわち，n 個の文字の多項式全体のなす LF-空間) の上への TVS 同形写像である．

F における**合成積**を

$$(f, g) \mapsto f * g : p \mapsto \sum_{q \leqslant p} f(p-q)g(q)$$

によって定義する (ここで $q \leqslant p$ は，すべての $j = 1, \ldots, n$ について $q_j \leqslant p_j$ を意味する).

このとき，写像 u, v およびそれらの転置 ${}^t u, {}^t v$ の間の関係を述べよ．また，$\mathbf{N}^n$ 上の関数の乗法積と合成積の，写像 u, v による変換との関係；多項式および形式的巾級数の積の，写像 ${}^t u, {}^t v$ による変換との関係を述べよ．

30. 5. 次の合成積代数には**零因子**がないことを証明せよ．$\mathscr{E}'$, $\mathscr{O}_C'$, $\mathscr{D}_+'$ (演習問題 27.6 参照).

31.

Sobolev 空間

超関数の理論の主要部分は，いままでの諸章において述べられた．しかしながら，言うまでもないことだが，この理論を解析学に応用するには，多く場合，特別なクラスの超関数のもっと立入った研究が必要になる．この章は，そのような一つのクラスの初等的理論に当てられる．このクラスは，偏微分方程式の理論において，その役割がますます重要さを増してきている．このクラスを構成する空間の系列は，定義 24.3 で導入されたものとは少々異なる意味での，超関数の**位数** (order) の概念に立脚したものであり，この概念は，数多の問題の研究において一層役立つことが判明している．Radon 測度の階数 $\leqslant m$ の導関数の和になる超関数 (定理 24.4) を考察する代りに，$L^p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ に属する関数の階数 $\leqslant m$ の導関数の和になるような超関数を考察してもよいであろう．このことによって得られる利益は，Radon 測度の空間よりも L^p の方が取り扱いがずっとやさしくなることにある．一例を挙げるならば，L^p の双対は，p が有限であるかぎり，L^p と同様によく知られた空間，すなわち $L^{p'}$ ($p'=p/(p-1)$) に他ならないからである．

位数 $\leqslant m$ (定義 24.3 の意味での) の超関数全体のなす空間は，$\mathcal{C}_c{}^m$ (コンパクトな台をもつ m 回連続的可微分関数の空間) の双対である．したがって，Radon 測度の階数 $\leqslant m$ の導関数の和になる超関数の概念は (コンパクトな台をもつ) 関数の概念の双対 [概念] であるということもできよう．Sobolev 空間の理論においても，同様のことが起こる．$p>1$ としたとき，L^p 関数の階数 $\leqslant m$ の導関数の和となる超関数の概念は，その階数 $\leqslant m$ の導関数がすべて $L^{p'}$ ($p'=p/$

$(p-1)$) に属し，さらに，$\mathcal{C}_c^\infty$ 関数の（自然な意味での）極限となるような関数の概念の双対であると言える．さて，これらのアイディアの正確な形を説明しよう．

これから暫くの間，Ω は $\mathbf{R}^n$ の任意の開集合とし，m は整数 $\geqslant 0$ とする．

定義 31.1. $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ としたとき，Ω 上の超関数 u のうち，その階数 $\leqslant m$ の導関数がすべて $L^p(\Omega)$ に属するようなものの全体を $H^{p,m}(\Omega)$ で表わす．

$u \in H^{p,m}(\Omega)$ とすれば，$u \in L^p(\Omega)$ である．したがって，u は Ω 上の局所可積分関数である（定理 21.4）．空間 $H^{p,m}(\Omega)$ には，次の自然なノルムを入れる

(31.1) $$u \mapsto \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |(\partial/\partial x)^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

ここで α は n-系 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を表わす．ノルム (31.1) は $\|u\|_{p,m,\Omega}$ と書くが，誤解の恐れのないときには，単に $\|u\|_{p,m}$ とも書く．すぐ後にわかるように，$p = 2$ の場合が特別に重要である．この場合には，ノルム (31.1) は通例 $\|u\|_m$ で表わされる．

命題 31.1. $H^{p,m}(\Omega)$ はノルム (31.1) に関して Banach 空間である．

証　明　$\{u_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を $H^{p,m}(\Omega)$ における Cauchy 列としよう．すると各 n-系 $\alpha, |\alpha| \leqslant m$ について，$\{(\partial/\partial x)^\alpha u_k\}$ は $L^p(\Omega)$ における Cauchy 列となり，したがってこの空間において，一つの極限 u^α に収束する．とくに，$\{u_k\}$ は $L^p(\Omega)$ において，極限 $u = u^0$ に収束する．ところで，微分作用素は $\mathscr{D}'(\Omega)$ からそれ自身への連続写像だから，$(\partial/\partial x)^\alpha u_k$ は $\mathscr{D}'(\Omega)$ において $(\partial/\partial x)^\alpha u$ に収束する．Hausdorff 空間における極限の一意性から，$u^\alpha = (\partial/\partial x)^\alpha u$ を得る（証終）．

系. $H^{2,m}(\Omega)$ はノルム (31.1) に関して Hilbert 空間となる．

これを示すには，命題 31.1 に次の注意を加えればよい．$p = 2$ の場合には，ノルム (31.1) は準双線形形式

(31.2) $$(u, v) \mapsto \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int (\partial/\partial x)^\alpha u(x) \overline{(\partial/\partial x)^\alpha v(x)} \, dx$$

に付随するノルムである，通例，(31.2) は $(u, v)_{m,\Omega}$ または $(u, v)_m$ によって表わす．

$H^{p,m}(\Omega)$ から $L^p(\Omega)$ への，したがってもちろん $\mathscr{D}'(\Omega)$ への，自然な単射は連続である．また，$m_1 \geqslant m_2$ ならば $H^{p,m_1}(\Omega) \subseteq H^{p,m_2}(\Omega)$ であり，この自然な単射の [写像としての] ノルムは $\leqslant 1$ である (実際，これが1に等しいことも容易にわかる)．Banach 空間 $H^{p,m}(\Omega)$ について注意すべき重要なことは，これらの空間は一般には超関数の正規な空間ではないこと，すなわち $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ が $H^{p,m}(\Omega)$ で稠密でないことである (これはもちろん，一般にはである；$p < +\infty$, $m = 0$ とすれば，$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ は明らかに $H^{p,m}(\Omega)$ で稠密であり，$\Omega = \mathbf{R}^n$ ならば $p < +\infty$ のとき $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ は $H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$ で稠密である [直ぐ後に示される])．

定義 31.2. $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $m \geqslant 1$ のとき，$H^{p,m}(\Omega)$ における $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の閉包を $H_0^{p,m}(\Omega)$ で表わす．

Ω を含む任意の開集合 Ω' に対して，$\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の $H^{p,m}(\Omega)$ におけるノルムは $H^{p,m}(\Omega')$ におけるノルムに等しい．これは，$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega')$ への自然な単射が $H_0^{p,m}(\Omega)$ から $H_0^{p,m}(\Omega')$ への等距離写像に拡張されることを意味している．そこで $H_0^{p,m}(\Omega)$ 上のノルム (31.1) を $u \mapsto \|u\|_{p,m}$ で示すことにする[1]．

命題 31.1 と，Banach 空間 (あるいは Hilbert 空間) の閉部分空間はまた Banach 空間 (Hilbert 空間) になることから，次のことが成り立つ．

命題 31.2. $H_0^{p,m}(\Omega)$ は Banach 空間である $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$；$H_0^{2,m}(\Omega)$ は Hilbert 空間である．

$H_0^{p,m}(\Omega)$ が，一般には，$H^{p,m}(\Omega)$ の真の部分空間になることをみるために，$p = 2$, $m = 1$ とし，Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界集合である場合を考察しよう．このとき，$H^{2,1}(\Omega)$ における $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の直交補空間は，$H^{2,1}(\Omega)$ の元 u のうちで，すべての

1) すなわち，Ω を明示する必要がないから．

$\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して $(u, \phi)_1 = 0$ を満たすもの全体から成っている．ところで ((31.2) 参照)

$$(u, \phi)_1 = \int_\Omega u(x)\overline{\phi(x)}\,dx - \sum_{j=1}^n \int_\Omega u(x)(\partial/\partial x_j)^2\overline{\phi(x)}\,dx$$

だから，これらの元 u はちょうど次の偏微分方程式の (Ω 上の超関数の意味での) 解である．

$$u - \Delta u = 0. \tag{31.3}$$

ここで $\Delta = (\partial/\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial/\partial x_n)^2$ は **Laplace 作用素** (Laplace operator)[1] である．(31.3) を満たすような [零でない] $H^{2,1}(\Omega)$ の元が存在することを見るのは容易である．実際，全空間 $\mathbf{R}^n$ における (31.3) の解の Ω への制限をとれば十分である．なぜなら，これらの解は $\mathbf{R}^n$ において $\mathcal{C}^\infty$ であることが証明できるし，Ω は有界だから，その Ω への制限は明らかに，すべての $m \geqslant 0$ について，$H^{2,m}(\Omega)$ に属するからである．これらの事実を用いたくなければ，関数 $x \mapsto e^{\langle x,\zeta \rangle}$ の Ω への制限をとってもよい．ただし，$\zeta \in \mathbf{C}^n$ は次の方程式

$$\sum_{j=1}^n (\zeta_j)^2 = 1$$

を満たすとする．

さて，$H_0^{p,m}(\Omega)$ は Ω 上の超関数の正規空間[2] であるから，その双対は標準的に Ω 上の一つの超関数空間と同一視できる．これから，それを $p < +\infty$ の場合について述べよう．

定義 31.3. $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $m \geqslant 1$ とする．Ω 上の超関数であって，$L^p(\Omega)$ に属する関数の階数 $\leqslant m$ の導関数の有限和に等しいものの全体からなる空間を $H^{p,-m}(\Omega)$ で表わす．

$1 \leqslant p < +\infty$ として，$p' = p/(p-1)$ とおく．$u \in H^{p',-m}(\Omega)$ とすれば，$L^{p'}(\Omega)$ に属する関数 $g_\alpha (\alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| \leqslant m)$ が存在して

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (\partial/\partial x)^\alpha g_\alpha$$

---

1) 単に**ラプラシアン** (Laplacian) ということが多い．

2) 下巻 28 章 374 頁参照．

と書ける．したがって，$\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して

$$\langle u, \phi\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \int g_\alpha(x)(\partial/\partial x)^\alpha \phi(x)\,dx$$

となるから，Hölder の不等式 (定理 20.3) を用いれば

$$|\langle u, \phi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|g_\alpha\|_{L_{p'}} \|(\partial/\partial x)^\alpha \phi\|_{L_p} \leqslant C\|\phi\|_{m,p}$$

を得る．これは，$\phi \mapsto \langle u, \phi\rangle$ が $H_0^{p,m}(\Omega)$ 上の連続線形形式に一意的に延長できることを意味している．

この延長を，u の $H_0^{p,m}(\Omega)$ への**標準的延長** (canonical exfension) とよぶ．

命題 31.3. $p \geqslant 1$ を有限とし，m を整数 $\geqslant 1$ とする．[上述の] 標準的延長は，空間 $H^{p',-m}(\Omega)$ から空間 $H_0^{p,m}(\Omega)$ の双対の上への，1対1線形写像である．

$p' = p/(p-1)$ であったことを思い出そう．

命題 31.3 の証明　標準的延長は一応は中への写像であった．もちろんそれは線形であり，$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ が $H_0^{p,m}(\Omega)$ で稠密なことから，1対1である．したがって，証明すべきことは，それが上への写像になることである．このことは次のようにして容易に示すことができる．$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant m$ となるような n-系 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ の個数を $N = N(m, n)$ で示すことにして，空間 $L^p(\Omega)$ の N 個のコピーの積空間に積位相を入れたものを E で表わす．したがって，E の元 f とは $L^p(\Omega)$ の元を成分とする N-系 (f_α) であり，E の位相はノルム $(f_\alpha) \mapsto (\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|f_\alpha\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}$ であたえられる．これによって，E は Banach 空間 ($p = 2$ のときは Hilbert 空間) となる．よって，E の双対は $L^p(\Omega)$ の双対 (それは $L^{p'}(\Omega)$ に標準的に同形) の N 個のコピーの積に標準的に同形になる．他方，$H^{p,m}(\Omega)$ から E への，したがって $H_0^{p,m}(\Omega)$ から E への標準的等距離写像，すなわち

(31.4) $$v \mapsto ((\partial/\partial x)^\alpha v)_{|\alpha|\leqslant m}$$

が存在する．この写像の転置すれば，E' から $H_0^{p,m}(\Omega)$ の双対の上への連続線

形写像が得られる．これが上への写像であることは，Hahn–Banach の定理から直ちに従う．実際，$H_0^{p,m}(\Omega)$ 上の任意の連続線形形式は，(31.4) の写像による $H_0^{p,m}(\Omega)$ の像の上の連続線形形式に移せるから，それを E 全体の上の連続線形形式に拡張することができて，この拡張は (31.4) の転置写像によって，$H_0^{p,m}(\Omega)$ 上のもとの線形形式にもどるからである．

さて，L を $H_0^{p,m}(\Omega)$ 上の任意の連続線形形式としよう．L は，E の双対の元，すなわち関数 $g_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ の N–系 (g_α)，の (31.4) の転置による像である．そこで，$u=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^\alpha(\partial/\partial x)^\alpha g_\alpha$ とおけば，L が u の標準的延長であることがただちにわかる．実際，任意の $\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して，$L(\phi)$ と $\langle u, \phi\rangle$ を比較してみればよい (証終)．

注意 31.1. 空間 $H^{p',-m}(\Omega)$ において，次のノルム

$$\|u\|_{p',-m}=\inf\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|g_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}\right)^{1/p'}$$

を定義することができる．ここで inf は，次の形の u の表現のすべてにわたる下限である．

$$u=\sum_{|\alpha|\leq m}(\partial/\partial x)^\alpha g_\alpha,\ g_\alpha\in L^{p'}(\Omega).$$

そうすれば，命題 31.3 の証明を見ればわかるように，標準的延長は $H^{p',-m}(\Omega)$ から $H_0^{p,m}(\Omega)$ の双対の上への等距離写像となる．

ここでも，$p=2$ の場合はもう少し詳しく調べる価値がある．Hilbert 空間 $H_0^{2,m}(\Omega)$ からその反双対の上への標準的等距離写像を J とし (定理 12.2)，K: $(H_0^{2,m}(\Omega))'\to H^{2,-m}(\Omega)$ を標準的延長の逆写像とする．いま L を $H_0^{2,m}(\Omega)$ 上の連続反線形汎関数とすれば，$\overline{L}$ は同じ空間上の連続線形汎関数となるから，$\overline{K}(L)=\overline{K(\overline{L})}$ によって $\overline{K}$ を定義する (任意の超関数 T の複素共役は，$\langle\overline{T}, \phi\rangle=\overline{\langle T, \overline{\phi}\rangle}$，$\phi\in\mathscr{C}_c^\infty$ によって定義する)．かくして，$\overline{K}$ は $H_0^{2,m}(\Omega)$ の反双対から $H^{2,-m}(\Omega)$ の上への線形等距離写像となる (注意 31.1 参照)．最後に，$\overline{K}\circ J$ を考えれば，これは $H_0^{2,m}(\Omega)$ から $H^{2,-m}(\Omega)$ の上への線形等距離写像となる．これを $H_0^{2,m}(\Omega)$ から $H^{2,-m}(\Omega)$ の上への**標準的等距離写像**という．

命題 31.4. $H_0^{2,m}(\Omega)$ から $H^{2,-m}(\Omega)$ の上への標準的等距離写像は，

$$u \mapsto \sum_{|\alpha|\leqq m} (-1)^{\alpha}(\partial/\partial x)^{2\alpha}u$$

によってあたえられる．

ここで記号：$2\alpha=(2\alpha_1,\dots,2\alpha_n)$ を用いた．たとえば，$m=1$ ならば，上の標準的等距離写像は，写像

$$u \mapsto u-\Delta u,\quad \Delta: \text{Laplace 作用素}$$

である． 命題 31.4 の証明は，本質的には，$u\in H_0^{2,m}(\Omega)$ と $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して

$$(u,\phi)_m=\sum_{|\alpha|\leqq m}(-1)^{\alpha}\int u(x)(\partial/\partial x)^{2\alpha}\overline{\phi(x)}\,dx$$

が成り立つということにある．詳細は読者に委せる．

系. 任意の $m=1,2,\dots$ について，$H^{2,-m}(\Omega)$ は超関数の正規空間である．

実際，標準的等距離写像は $H_0^{2,m}(\Omega)$ を $H^{2,-m}(\Omega)$ の上に写すが，上への等距離写像による稠密な集合の像は稠密だから，これでよい[1]．

ところで，空間 $H_0^{p,m}(\Omega)$ および $H^{p,-m}(\Omega)$ は $m\geqq 1$ に対して定義した．しかしながら，$m=0$ に対しても，$H^{p,0}(\Omega)=L^p(\Omega)$ によって定義することができる．

さて，$\Omega=\mathbf{R}^n$ の場合に中心をおいて調べてみよう．

命題 31.5. $1\leqq p<+\infty$，$m\geqq 1$ とする．このとき，$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ は $H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$ において稠密である．

証　明　切落しと正則化による (28 章参照)．$g\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ を，開球 $\{x;|x|<1\}$ において 1 に等しく，$|x|>2$ ならば 0 に等しい関数として，

$$g_k(x)=g(x/k),\qquad k=1,2,\dots$$

とおく．関数 g_k は，$|x|<k$ ならば 1 に，$|x|>2k$ ならば 0 に等しい．$H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$

1) 標準的等距離写像が $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ を $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ の中へ写すからである (命題 31.4 参照)．

に属する任意の関数をuとし，微分作用素$(\partial/\partial x)^\alpha$, $|\alpha|\leqslant m$ の任意の一つをDとする．Leibniz の公式によって

$$D(g_k u)-g_k Du=\sum_{0\neq\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}[(\partial/\partial x)^\beta g_k](\partial/\partial x)^{\alpha-\beta}u$$

となるから，

$$\int|D(g_k u)-g_k Du|^p dx\leqslant C\sum_{|\beta|<m}\int_{|x|>k}|(\partial/\partial x)^\beta u|^p dx$$

を得る．ここで，Cは正の定数であって，$k=1,2,\ldots$ には依らない．また，Cを適当にえらぶならば，

$$\int|g_k Du-Du|^p dx\leqslant C\int_{|x|>k}|Du|^p dx$$

が成り立つ[1]．ところで，任意の γ, $|\gamma|\leqslant m$ について $(\partial/\partial x)^\gamma u\in L^p(\mathbf{R}^n)$ だったから，$k\to\infty$ とすれば

$$\begin{aligned}\|D(g_k u)-Du\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}&\leqslant\|D(g_k u)-g_k Du\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\\&\quad+\|g_k Du-Du\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\to 0\end{aligned}$$

を得る．これは，$H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$ において，$g_k u$ がuに収束することを示している．このことを考慮すれば，証明を完成するには，コンパクトな台をもつ任意の超関数 $u\in H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$ が，テスト関数の（この空間における）極限になっていることを示せば十分である．この証明のためには，$\Omega=\mathbf{R}^n$ を仮定する必要はない．

補題 31.1. $p\geqslant 1$ を有限とすれば，コンパクトな台をもつ任意の $u\in H^{p,m}(\Omega)$ は，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に属する関数列の極限である．

補題 31.1 の証明　軟化作用素を定義するいつもの関数をρとし（たとえば補題 28.1 を見よ），$\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ とする．εを十分小さくとれば，$\rho_\varepsilon*u$ の台はΩに含まれる．もちろん $\rho*u$ は $\mathcal{C}_c^\infty$ 関数である．したがって，任意の n-系 α, $|\alpha|\leqslant m$ について，$k\to\infty$ のとき，$(\partial/\partial x)\rho_{1/k}*u$ が $(\partial/\partial)u$ に

1)　たとえば，もともと $0\leqslant g(x)\leqslant 1$, $x\in\mathbf{R}^n$ であったとすれば，新しいCはもとのCと1の大きい方とすればよい．

$L^p(\Omega)$ において収束することを示せば十分である．ところで，

$$(\partial/\partial x)^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = \rho_\varepsilon * (\partial/\partial x)^\alpha u$$

だから，任意の（コンパクトな台をもつとは限らない）$L^p(\Omega)$ の関数 v に対して，$k \to \infty$ のとき，$\rho_{1/k} * v \to v$ が $L^p(\Omega)$ において成り立つことを証明すれば十分である．この事実の一番短かい証明は，後に述べて証明する Banach-Steinhaus の定理（定理 33.1）の一つの結果に基礎をおくものである．

少々先取りすることになるが，いまの場合に利用する結果というのは次のものである：《E を Banach 空間とし，$\{u_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ を E からそれ自身の中への連続線形写像の列であって，次の二つの条件を満たすものとする．(1) 定数 $C > 0$ が存在して，すべての k について u_k のノルムは $\leqslant C$ である；(2) E の稠密な部分集合 A が存在して，$k \to +\infty$ のとき，すべての $x \in A$ に対して，$u_k(x)$ は x に E において収束する．これらの仮定のもとに，$k \to +\infty$ のとき，すべての $x \in E$（x は $x \in A$ でなくても）について，$u_k(x)$ は x に収束する》．この結果をわれわれは，$L^p(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身の中への写像列 $u \mapsto \rho_{1/k} * u$ に適用する．上述の仮定は満されている．実際，これらの写像のノルムは $\leqslant \|\rho_{1/k}\|_{L^1} = \|\rho\|_{L^1}$（定理 26.1 の系 2）；$k \to +\infty$ とするとき，u がコンパクトな台をもつ連続関数であれば，$\rho_{1/k} * u$ は u に $\mathbf{R}^n$ 上で一様収束する（定理 15.2）；$\mathscr{C}_c^0$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$ において稠密である（定理 11.3）．したがって，すべての $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$ に対して，$u = \lim_{k \to +\infty}(\rho_{1/k} * u)$ が結論される．これで補題，したがって命題 31.5 が証明された．

注意 31.2. 補題 31.3 から，$H^{p,m}(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ の元のうち，コンパクトな台（Ω に含まれる）をもつものは $H_0^{p,m}(\Omega)$ に属することがわかる．

$H^{p,m}(\mathbf{R}^n) \subseteq L^p(\mathbf{R}^n)$ だから，空間 $H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$ に属する超関数はすべて緩増大である．$H^{p,-m}(\mathbf{R}^n)$ に属する超関数もまた，その定義から直ちにわかるように，緩増大である．この事実によって，$H^{p,k}(\mathbf{R}^n)$ に属する超関数は，k が整数 $\geqslant 0$ でも <0 でも，Fourier 変換することができる．われわれは考察を $p=2$ の場に限ることにする．このときには Fourier 変換は $L^2(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身の上への等距離写像となるので（Plancherel の公式，定理 25.2 の系 1），考察がも

っとも容易である．

命題 31.6. k を整数 $\geqslant 0$ または <0 とするとき，超関数 u が $H^{2,k}(\mathbf{R}^n)$ に属するための必要十分条件は，u が緩増大であって，その Fourier 変換 $\hat{u}$ が測度 $(1+|\xi|^2)^k d\xi$ に関して自乗可積分なことである．

証　明　まず $k \geqslant 0$ の場合を考えよう．その長さ $|\alpha|$ が $\leqslant k$ となる任意の n-系 α について，$(\partial/\partial x)^\alpha u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ であるが，Fourier 変換すれば，これは $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbf{R}_n)$ を意味する．これからただちに，われわれの主張が従う．

次に $k<0$ の場合を考える．命題 31.4 によって，$H^{2,k}(\mathbf{R}^n)$ の各元は $\sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^\alpha(\partial/\partial x)^{2\alpha}u$, $u \in H^{2,|k|}(\mathbf{R}^n)$ という形に書かれる．これに Fourier 変換を施し，$k>0$ の場合の結果を適用すれば，求める結論が容易に得られる．

命題 31.6 は空間列 $H^{2,k}(\mathbf{R}^n)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ の**補間** (interpolation)，すなわち，これらの空間を Hilbert 空間の 1 パラメーターの系列の中に編入することの自然な方法を示している．この補間は，次に定義する空間系 H^s (s は任意の実数) によって得られる．

定義 31.4. 任意の実数 s に対して，H^s または $H^s(\mathbf{R}^n)$ により，緩増大超関数 u であって，その Fourier 変換 $\hat{u}$ uが測度 $(1+|\xi|^2)^s d\xi$ について自乗可積分な関数になるもの全体からなる空間を表わす．

かくして $u \in H^s$ は $(1+|\xi|^2)^{s/2}u \in L^2$ を意味する．命題 31.6 は，s が整数 $\geqslant 0$ または <0 のときに，$H^s = H^{2,s}(\mathbf{R}^n)$ となることを意味している．空間 H^s 上では内積

$$(u, v)_s = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi$$

およびこれに付随するノルム

$$\|u\|_s = \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2}$$

を考える．

命題 31.7. 内積 $(\ ,\ )_s$ に関して，H^s は Hilbert 空間となる.

これは，正 Radon 測度に関する L^2 空間についてのよく知られた事実 (Fisher-Riesz の定理) に他ならない．$s \geqslant s'$ ならば，連続でノルム $\leqslant 1$ の自然単射 $H^s \to H^{s'}$ が存在する．Plancherel の定理によって，H^0 は Hilbert 空間として $L^2(\mathbf{R}^n)$ と一致する (すなわち，内積もノルムも一致する).

$\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}$ は $\mathbf{R}_n$ 上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数であり，$\mathscr{O}_M$ に属する．したがって，その Fourier 変換は $\mathscr{O}_c'$ に属する (定理 30.5)．これを U_s で表わすことにする．このとき，合成積写像 $S \mapsto U_s * S$ を考えれば，これは緩増大超関数の空間 $\mathscr{S}'$ からそれ自身の中への連続線形写像である (定義 30.1)．次の結果は Fourier 変換によりただちに出る (定理 30.4 参照).

命題 31.8. s, a を任意の二つの実数とするとき合成積写像

$$u \mapsto U_s * u$$

は H^{s+a} から H^a の上への等距離写像である.

とくに，$u \mapsto U_s * u$ は H^s から $H^0 = L^2(\mathbf{R}^n)$ の上への等距離写像であるから，ノルム空間 H^s はすべて $L^2(\mathbf{R}^n)$ のコピーであると言える[1]．したがって，H^s はすべての s に対して Hilbert 空間である．他方，$\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ は $L^2(\mathbf{R}^n)$ の稠密な部分空間であり，$\phi \mapsto U_s * \phi$ は明らかに $\mathscr{S}$ を自分自身の中に写す．稠密な部分集合を上への等距離写像で写した像は稠密な部分集合となるから，次の結果を得る.

命題 31.9. 埋め込み写像 $\mathscr{S} \to H^s$ は連続であり，その像は稠密である．とくに，H^s は $\mathbf{R}^n$ 上の超関数の正規空間である.

積空間 $H^s \times H^{-s}$ 上で，双線形形式

(31.5) $\quad (u, v) \mapsto (U_s * u, U_{-s} * \bar{v})_0$

---

1) ノルム空間 (或いは Hilbert 空間) として同形であると言う意味においてコピーであると言えよう．しかし，可分な Hilbert 空間はすべて $l^2(\mathbf{N})$ に同形なのだから，このことに特別の意味はない．ここでは，その同形写像が具体的な U_s で得られるところに意味があろう.

$$= \int (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{\bar{v}}(-\xi)\,d\xi$$

を考えることができる．ここで $\bar{v}$ は v の複素共役である．もし $v \in \mathscr{S}$ ならば

$$(U_s * u,\ U_{-s} * \bar{v}) = \int \hat{u}(\xi)\hat{\bar{v}}(-\xi)\,d\xi = \langle \mathscr{F}u,\ \overline{\mathscr{F}}v \rangle = \langle u,\ v \rangle$$

を得る．ここで，括弧 $\langle\, ,\rangle$ は $\mathscr{S}$ と $\mathscr{S}'$ の間の双対性の括弧であり，緩増大超関数の Fourier 変換の定義を用いた．この注意により，双線形形式 (31.5) を示すのに，$(u,\ v) \mapsto \langle u,\ v \rangle$ という記号を用いることが正当化される．$u \in H^s$ ならば $U_{2s} * u \in H^{-s}$ となることから

$$\langle u,\ U_{2s} * \bar{u} \rangle = (U_s * u,\ U_s * u) = \|u\|_s^2$$

を得る．v を H^s に属するもう一つの元とすれば

$$\langle u,\ U_{2s} * \bar{v} \rangle = (u,\ v)_s$$

となる．これらの事実を用いれば，次の結果の成り立つことを見るのは容易である．

命題 31.10. 双線形写像 (31.5) によって H^s と H^{-s} はたがいに他の双対になる．写像 $u \mapsto U_{2s} * \bar{u}$ は，Hilbert 空間 H^s からその双対 H^{-s} の上への標準的反線形等距離写像である．

s が非負整数のときには，写像 $u \mapsto U_{2s} * u$ は微分作用素 $u \mapsto (1-\Delta/4\pi)^s u$ に他ならない．ここで Δ は Laplace 作用素である (命題 31.4)．

空間の 1 パラメーター系 H^s は，超関数の正則性を測る尺度として用いられることが多い．次の結果は，空間 H^s がこの役割を果すことの一つの理由である．

命題 31.11. $s > n/2$ とすれば，H^s の元はすべて連続関数である．

証　明　$s>n/2$ とし，$\phi \in \mathscr{S}$ とすれば，Schwarz の不等式によって，

$$\int |\hat{\phi}(\xi)|\,d\xi \leqslant \int |\hat{\phi}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\,d\xi$$

$$\leqslant \|\phi\|_s \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s}\,d\xi\right)^{1/2}$$

この不等式を $\mathscr{S}$ から H^s に拡張することによって，Fourier 変換は H^s を $L^1(\mathbf{R}_n)$ に写すことがわかる[1]．換言すれば，関数 $u \in H^s$ はすべて，可積分関数の Fourier 逆変換となっている．したがって，命題 31.11 は Lebesgue の定理 (定理 25.3) からただちに従う．

系． m を整数 $\geqslant 0$ として，$s > m+n/2$ とすれば，H^s の各元は $\mathbf{R}^n$ 上で m 回連続的微分可能である．

実際，$u \in H^s$ とすれば，ただちにわかるように，任意の n-系 $\alpha, |\alpha| \leqslant m$ に対して $(\partial/\partial x)^\alpha u \in H^{s-m}$ となる．したがって，$s-m > n/2$ ならば，$(\partial/\partial x)^\alpha u$ は連続関数である．

最後に， Banach 空間族 $H^{p,m}$ から出発して構成されるものとして， 一方では，コンパクトな台をもつ超関数からなる空間について，また他方では，局所的に規定される超関数について述べておかねばならない．Ω を，前のように，$\mathbf{R}^n$ の開集合とし，K を Ω の任意のコンパクト集合とする．このとき，$H^{p,m}(K)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty\,;\, m :$ 整数 $\geqslant 0$ または $<0)$ によって，$H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$ に属する $\mathbf{R}^n$ 上の超関数のうちで，台が K に含まれるもの全体からなる空間を表わす．$H^{p,m}(K)$ には $H^{p,m}(\mathbf{R}^n)$ から導かれるノルムを入れる．$H^{p,m}(K)$ は明らかに Banach 空間 ($p=2$ ならば Hilbert 空間) となる．次に，$H_c^{p,m}(\Omega)$ によって，K が Ω のすべてのコンパクト集合を動くときの空間族 $H^{p,m}(K)$ の帰納極限[2] を表わす．明らかに $H_c^{p,m}(\Omega)$ は LF-空間になる．

Ω' を Ω の開部分集合とするとき，Ω 上の超関数 T の Ω' への制限を $T|\Omega'$ によって示すことにする．このとき，Ω 上の超関数 T であって，Ω の任意の相対コンパクトな開集合 Ω' に対して，$T|\Omega'$ が $H^{p,m}(\Omega')$ に属するもの全体のなす空間を $H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ で表わすことにする $(1 \leqslant p \leqslant +\infty\,;\, m :$ 整数 $\geqslant 0$ または $<0)$．空間 $H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ には $H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ から $H^{p,m}(\Omega')$ への写像 $T \mapsto T|\Omega'$ をすべて連続にするような局所凸位相のうちで最も粗い位相を入れて考えるものとする

---

1) ここで $\mathscr{S}$ が H^s で稠密なことを用いた．

2) 上巻 13 章 155 頁参照．

$(\overline{\Omega}'$: コンパクト $\subseteq\Omega)$. Ω の相対コンパクト開部分集合列で，その合併が Ω に等しいものをとることにより，$H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ が Fréchet 空間になることがわかる.

s が (整数とは限らぬ) 任意の実数のときにも，上述の $H_c^{p,m}(\Omega)$ を定義したのと全く同じ仕方で，$H_c^s(\Omega)$ を定義することができる．すなわち，K が Ω のコンパクト部分集合を動くとき，H^s の Hilbert 空間構造から導かれた Hilbert 空間構造をもつ空間族 $H^s(K)=\{u\in H^s\,;\,\mathrm{supp}\,u\subseteq K\}$ の帰納極限として定義するのである．しかしながら，$H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ を定義した上述の方法を用いては，$H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ を定義することはできない．それは今の場合 (少なくとも我々の考察の枠内では) 空間 $H^{p,m}(\Omega)$ に相当するものが無いからである．この困難は，切落し関数を用いることによって回避することができる．すなわち，空間 $H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ を，Ω 上の超関数 T であって，任意の $\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して ϕT が H^s に属するもの全体のなす空間として定義するのである．空間 $H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ の位相としては，$H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ から H^s への写像 $T\mapsto\phi T$ がすべて連続となるような位相のうちで最粗なものをとる (ϕ は $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ を動く). 関数 ϕ としては，Ω の (相対コンパクト) 開集合列でその合併が Ω に等しいものに対応して，その各開集合上で 1 に等しくなるような関数列に考察を限ってもよいから，$H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ は Fréchet 空間になることがわかる．もちろん言うまでもないことだが，$H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ もこの方法でも定義できるし，$p=2$ で s が整数 m に等しいときには，両方の定義は一致する.

空間族 $H_c^{p,m}(\Omega)$, $H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ および空間族 $H_c^s(\Omega)$, $H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ の基本的諸性質は演習問題の中に述べられる．それらの証明は読者に委せる．ところで，命題 31.11 とその系の簡単な帰結である次のことだけは，いま注意しておかねばなるまい．すなわち，

$$\mathscr{C}^\infty(\Omega)=\bigcap_{s\in\mathbf{R}}H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega),\ \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)=\bigcap_{s\in\mathbf{R}}H_c^s(\Omega)$$

が成り立つ．しかしながら，この後の等式において，これが位相もこめて成り立つと思わないように，用心することが必要である．《$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の部分集合が，この空間において 0 の近傍となるのは，それが或る $H_c^s(\Omega)$ における 0 の近傍と $C_c^\infty(\Omega)$ の共通部分になるときに限る》というのは正しくないのである (しか

しながら，ここで c を loc に替えれば正しい；したがって，前の方の等式は位相もこめて成り立つ)．これらの事実は，次の "双対" 等式 (演習問題 31.4 参照) と関連する．

(31.6) $$\mathscr{E}'(\Omega) = \bigcup_{s\in\mathbf{R}} H_c{}^s(\Omega),$$

(31.7) $$\mathscr{D}'^F(\Omega) = \bigcup_{s\in\mathbf{R}} H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

ここで $\mathscr{D}'^F(\Omega)$ は Ω 上の有限位数の超関数の空間を表わす．等式 (31.6) および (31.7) の成り立つことは，有限位相の超関数は局所 L^2 関数の導関数の有限和に等しいという事実 (定理 24.5 の系 2) と，テスト関数による乗法はこれらの導関数の最高階数を変えないという事実に依る．Fourier 変換を用いれば容易に検証できるように，コンパクトな台をもち位数 $\leqslant m$ となる超関数は，すべて或る一つの空間 $H_c{}^s(\Omega)$ に属する．ここで，s は m と n (空間 $\mathbf{R}^n$ の次元) にだけ依存する．

演 習 問 題

31.1. Δ を n 変数の Laplace 作用素とし，λ を一の数 >0 とする．このとき，任意の $f \in H^{2,-1}(\Omega)$ に対して

$$(\Delta-\lambda)u = f$$

となる $u \in H_0{}^{2,1}(\Omega)$ が一意的に存在することを示せ．また

$$H^{2,1}(\Omega) = H_0{}^{2,1}(\Omega) \oplus N_\lambda$$

となることを示せ．ここで，$\oplus$ は Hilbert 和を示し，N_λ は斉次方程式 $(\Delta-\lambda)u=0$ の解からなる $H^{2,1}(\Omega)$ の部分空間である (したがって，読者は，N_λ が閉空間であることも示さねばならない)．

31.2. Δ および λ は前問の通りとする．このとき，任意の $f \in H^{2,-1}(\Omega)$ と任意の $g \in H^{2,1}(\Omega)$ に対して

$$(\Delta-\lambda)u = f,\ u-g \in H_0{}^{2,1}(\Omega)$$

となる $u \in H^{2,1}(\Omega)$ が存在することを証明せよ．

31.3. $H^{p,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $H_c{}^{p,m}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < +\infty\,;\ m = 0, \pm 1, \ldots)$ および $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $H_c{}^s(\Omega)$ (s：実数) は超関数の正規空間であることを証明せよ．

31.4. $1 \leqslant p < +\infty, 1 < p' \leqslant +\infty$ とし，$1/p+1/p'=1$ とする．このとき，標準的

単射 $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega) \to H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ の転置は，$H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ の強双対から $H_c^{p',-m}(\Omega)$ ($\subseteq \mathscr{D}'(\Omega)$) の上への TVS 同形写像であることを証明せよ ($H_c^{p',-m}(\Omega)$ の位相は，$H^{p',-m}(K)$ (K : Ω のコンパクト集合) の帰納極限位相とする). $H_c^s(\Omega)$ と $H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ は (自然な仕方——これもはっきりと述べよ——において) たがいに他の双対になっていることを証明せよ.

31.5. $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の位相は，空間系 $H_c^s(\Omega)$ ($s \in \mathbf{R}$) の位相の共通部分に等しくならない理由を明らかにせよ.

31.6. $\mathscr{D}'(\Omega)$ の位相は，$\mathscr{D}'(\Omega)$ から $H_{\mathrm{loc}}^{-\infty}(\Omega')$ への制限写像 $T \mapsto T|\Omega'$ をすべて連続にするような最も粗い局所凸位相であることを示せ. ただし，Ω' は Ω の相対コンパクト開部分集合をすべて動くとする ($H_{\mathrm{loc}}^{-\infty}(\Omega')$ は，ベクトル空間 $\bigcup_{s\in\mathbf{R}} H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega')$ に，単射 $H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega') \to H_{\mathrm{loc}}^{-\infty}(\Omega')$ がすべて連続となるような最も細かい局所凸位相を入れたものである).

31.7. $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ とすれば，写像 $u \mapsto \phi u$ は $H^{p,m}(\Omega)$ から $H_0^{p,m}(\Omega)$ への線形連続写像となることを証明せよ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

31.8. 写像 $(\phi, u) \mapsto \phi u$ は，$\mathscr{S} \times H^s$ から H^s への連続双線形写像であることを証明せよ (ヒント：定理 34.1 の系を用いよ).

32.

線形写像の同等連続集合

いままでの諸章において，超関数の理論を L. Schwartz のあたえた形で述べた．超関数の諸空間の大部分は，適当な $\mathcal{C}^\infty$ 関数の空間の双対として導入された．超関数に対する基本的諸演算（微分，関数による乗法，Fourier 変換，合成積）は，$\mathcal{C}^\infty$ 関数の諸クラスにおける同様の演算の転置として，系統的に導入された．位相ベクトル空間に関する知識として要求されるものは，極く僅かであった．我々が利用したのは，実際には Hahn–Banach の定理（18 章）だけであった．取り扱ってきた概念といえば，局所凸な Hausdorff 空間の双対と連続線形写像の転置だけである．しかしながら，いまや，これらの導入された関数および超関数の諸空間の構造を，ずっと詳しく考察しなければならない．そうするためには，再び抽象的関数解析学に立ち戻る必要がある．考察の対象とするのは，位相ベクトル空間に関する最も重要な結果の一つであるところの Banach–Steinhaus の定理である．この定理は Hilbert 空間の一性質 —— それは今世紀の始めにまでさかのぼり，ながらく **Osgood の定理**または**一様有界の原理**とよばれてきたものであって，Hilbert 空間における弱収束列はすべて強有界，すなわちノルムの意で有界になることを述べたもの —— の拡張である．ここで述べる形の拡張は N. Bourbaki によるものであって，我々の応用の目的に関する限りは，適用範囲のもっとも広い形になっている．この定理は，Hausdorff TVS E から F への連続線形写像の全体からなる空間 $L(E, F)$ に関するものである（実際は，E を樽型空間[1]，F を局所凸と仮定する）．まず始め

---

1) 次章の始めに定義する（定義 33.1）．

に，空間 $L(E, F)$ に種々の局所凸位相を導入する．これは 19 章において種々の双対位相を定義したときにおこなったことの拡張にすぎない．その際と同様にまず E の有界集合族 $\mathfrak{S}$ であって，次の二条件を満たすものを考える．

($\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$)　A, $B \in \mathfrak{S}$ とすれば，$C \in \mathfrak{S}$ が存在して $A \cup B \subseteq C$.

($\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$)　$\lambda \in \mathbf{C}$, $A \in \mathfrak{S}$ とすれば，$B \in \mathfrak{S}$ が存在して $\lambda A \subseteq B$.

そうして，E の有界集合 B と，F における 0 の近傍 V をとり，この集合の対 (B, V) に対して，$L(E, F)$ の部分集合

$$\mathcal{U}(B\,;\,V) = \{u \in L(E, F)\,;\, u(B) \subseteq V\}$$

を定義する．

命題 32.1. $L(E, F)$ の部分集合 $\mathcal{U}(B\,;\,V)$ は吸収的である．V が凸（または平衡的)ならば，$\mathcal{U}(B\,;\,V)$ は凸（または平衡的）である．

証　明　$\mathcal{U}(B, V)$ が凸あるいは平衡的という部分の陳述は明らかである．u を E から F への任意の連続線形写像としよう．u による B の像 $u(B)$ は F において有界になる（命題 14.2)．したがって，数 $\lambda \neq 0$ が存在して $u(B) \subseteq \lambda V$. これは

$$\lambda^{-1}u \in \mathcal{U}(B\,;\,V) \text{ または } u \in \lambda\mathcal{U}(B\,;\,V)$$

を意味している．すなわち $\mathcal{U}(B\,;\,V)$ は吸収的である．

（証終).

($\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$) と ($\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$) を満足する E の一つの有界部分集合族 $\mathfrak{S}$ の中を B が動き，F における 0 の一つの基本近傍系の中を V が動くとき，集合 $\mathcal{U}(B\,;\,V)$ は $L(E, F)$ における一つのフィルター基底を構成する．これから生成されるフィルターは，$L(E, F)$ の線形構造と整合するような一つの位相に関して，$L(E, F)$ の 0 の近傍フィルターとなる．このことを見るには $V \subseteq W \subseteq F$ ならば $\mathcal{U}(B\,;\,V) \subseteq \mathcal{U}(B\,;\,W)$ となることに注意して，定理 3.1 と命題 32.1 を適用すればよい．

定義 32.1. 条件 ($\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$), ($\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$) を満足する E 上の有界集合族 $\mathfrak{S}$ があたえられた

とき $L(E, F)$ 上の $\mathfrak{S}$-**位相** ($\mathfrak{S}$-topology) とは，B が $\mathfrak{S}$ を動き，V が F の任意の近傍基底を動くときの，次の形の集合

$$\mathcal{U}(B\,;\,V)=\{u\in L(E,F)\,;\,u(B)\subseteq V\}$$

からなる $L(E, F)$ の 0 の近傍基底によって定義される位相を言う．空間 $L(E, F)$ に $\mathfrak{S}$-位相を入れたものを

$$L_{\mathfrak{S}}(E,F)$$

によって示す．

次の命題は 19 章の諸結果 (とくに命題 19.1)．の一般化である．

命題 32.2. F が局所凸 TVS ならば，$L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ もそうなる．F が Hausdorff であり，$\mathfrak{S}$ に属する集合の合併が E で稠密ならば，$L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ は Hausdorff である．

証 明 前半は命題 32.1 からただちにわかる．後半を示すために，$u\in L(E, F)$ を 0 でない元としよう．これは $\mathfrak{S}$ に属する或る集合 B の点 x が存在して $u(x)\neq 0$ を意味する[†]．ところで，F は Hausdorff だから，F の 0 の近傍 V が存在して，$u(x)\notin V$. ゆえに $u(B)\nsubseteq V$, すなわち $u\notin\mathcal{U}(B\,;\,V)$. (証終).

位相を (0 の近傍系の言葉ではなくて) 収束の言葉を用いてはっきりさせたければ，次のように言うことができよう．$L(E, F)$ 上の任意のフィルター $\mathcal{F}$ と，E の任意の点 x に対して，M が $\mathcal{F}$ の中を動くときの集合

$$M(x)=\{u(x)\in F\,;\,u\in M\}$$

からなるフィルター基底によって生成されるフィルター $\mathcal{F}(x)$ を対応させれば，$\mathfrak{S}$ に属する (E の) 各部分集合上で一様に $\mathcal{F}(x)$ が (F において) 収束するとき，$\mathcal{F}$ は $\mathfrak{S}$-位相に関して $L(E, F)$ において収束する．たとば，E, F ともにノルム空間として，E の原点を中心とする有限半径のすべての球の族を $\mathfrak{S}$ とすれば，連続線形写像列 $u_n\,;\,E\to F$ が $L(E, F)$ において $\mathfrak{S}$-位相に関して 0 に収

†) この点に関して言えば，$\mathfrak{S}$ に属する集合の合併が稠密であると仮定することは必要ではなく，単にそれが**準全的** (total) であること，すなわち稠密な線形部分空間を張ることを仮定すればよい．[準全的は**基本的** (fundamental) ともいう].

束するためには，u_n のノルム（第I部，11章上巻132頁参照）が0に収束することが必要十分である．他の重要な例としては，$\mathfrak{S}$＝‘E のすべての有限部分集合の族’の場合がある．このとき，フィルター $\mathcal{F}$ が $\mathfrak{S}$–位相に関して0に収束するためには，E の各点 x に対して $\mathcal{F}(x)$ が F において0に収束することが必要十分である．

われわれにとって興味のある E の有界集合族は，19章に述べたものと同じである．すなわち

(1) E のすべての有限集合の族；このとき，対応する $\mathfrak{S}$–位相は**各点収束の位相**とよばれる；この位相を $L(E, F)$ に入れたものを $L_\sigma(E, F)$ で表わす（多くの書物では．これを $L_s(E, F)$ と表わすが，われわれは双対性のときに用いた記号に合わせることにする：F が複素数体 $\mathbf{C}$ のときには，もちろん $L(E, F) = F'$ であり，E'_σ はちょうど E の弱双対である）．

(2) E のすべての凸コンパクト集合の族（このとき，$\mathfrak{S}$–位相は**凸コンパクト収束の位相**とよばれる）；この位相を $L(E, F)$ に入れたものを $L_\gamma(E, F)$ で表わす．

(3) E のすべてのコンパクト集合の族；このときの $\mathfrak{S}$–位相は**コンパクト収束の位相**とよぶ；これを $L(E, F)$ に入れたものを $L_c(E, F)$ で表わす．

(4) E のすべての有界集合の族；このときの $\mathfrak{S}$–位相は**有界収束の位相**と言う；この位相を入れた $L(E, F)$ を $L_b(E, F)$ と表わす．この記号は19章の定義と合致する．すなわち $L_b(E, \mathbf{C}) = E'_b$ は E の強双対である．

上述の位相をそれぞれ σ, γ, c, b で表わすことにするならば，これらは，F が局所凸 Hausdorff である限り，やはり局所凸 Hausdorff である．また，これらの位相は次の強弱関係にある

$$\sigma \leqslant \gamma \leqslant c \leqslant b.$$

$L(E, F)$ の一つ部分集合が，これらの位相の一つに関して有界ならば，それより弱いものについてもまた有界であることに注意しておこう．とくに，$L(E, F)$ の任意の b–有界集合は σ–有界である． われわれの目標とする結果は， $L(E,$

F) の σ- 有界集合および b- 有界集合に関係すると同様に，線形写像の同等連続集合とも関係する．次に，この概念を導入しよう．われわれはすでに，位相空間 X から TVS E への写像の同等連続集合を定義した (定義 14.3)．とくに，線形写像の場合には定義は簡単化される (たとえば，線形写像がいたるところ連続であるためには，それが原点で連続なことが必要十分である)．

定義 32.2. E, F を二つの TVS とする．E から F への線形写像の集合 H が**同等連続**であるとは，F における 0 の任意の近傍 V に対して，E における 0 の近傍 U がが存在して，すべての写像 $u \in H$ について

$$x \in U \quad \text{ならば} \quad u(x) \in V$$

となることを言う

定義 32.2 の条件は，種々の仕方で書きかえることができる．たとえば：H が同等連続であるとは，F における 0 の任意の近傍 V に対して，E における 0 の近傍 U が存在して

$$H(U) = \bigcup_{x \in H} u(U) \subseteq V \tag{32.1}$$

となることをいう；あるいは，同じことであるが：H が同等連続であるとは，F における 0 の任意の近傍 V に対して

$$H^{-1}(V) = \bigcap_{x \in H} u^{-1}(V) \tag{32.2}$$

が E における 0 の近傍となることをいう．

さて，線形写像の同等連続集合の簡単な性質をいくつか述べて，証明しよう．同等連続集合の部分集合が同等連続になるのは明らかであるが，さらに

命題 32.3. E, F を二つの TVS とし，F は局所凸であるとする，このとき，$L(E, F)$ の同等連続部分集合の平衡凸包は同等連続である．

証明 H を同等連続集合 $\subseteq L(E, F)$ とし，H の平衡凸包を K とする．F における 0 の任意の近傍を V とし，V に含まれる平衡的凸近傍を W とする．仮定によって，E における 0 の近傍 U が存在して $H(U) \subseteq W$ となる．したがっ

て，$H(U)$ の平衡凸包 —— それは $K(U)$ に他ならない —— は W の平衡凸包に含まれる．W の平衡凸包は W に一致するから，それは V に含まれる（証終）．

F^E によって，積集合 $\prod_{x\in E} F_x$ を示すことにしよう．ここで，各 $x \in E$ に対して，F_x は F のコピーである．F^E には積位相ベクトル空間の構造を入れて考える．F^E における 0 基本近傍系として，次の形の集合

$$\prod_{x\in E} V_x$$

からなるものが存在する．ここで．各 $x \in E$ に対して V_x は F における 0 の近傍であり，有限個を除いては $V_x = F$ であるとする．ベクトル空間 F^E は，E 上で定義され，F に値をとるすべての関数（線形でも非線形でもよい）からなるベクトル空間 $\mathcal{F}(E, F)$ と同一視することができる．その標準的同形は，写像

$$\mathcal{F}(E, F) \ni f \mapsto (f(x))_{x\in E} \in \prod_{x\in E} F_x$$

であたえられる．換言すれば，この同形写像は，関数 $f \in \mathcal{F}(E, F)$ に対して F^E の元として，その "F_x- 軸" への射影が x における値 $f(x)$ となるものを対応させるのである．

標準的同形 $\mathcal{F}(E, F) \cong F^E$ は位相も含めて成り立つ．すなわち，$\mathcal{F}(E, F)$ に各点収束の位相を入れ，F^E に積位相を入れたとき，位相ベクトル空間構造についての同形となる．とくに，$L_\sigma(E, F)$ は F^E の線形部分空間と見なすことができる：$L(E, F)$ 上の σ- 位相はちょうど F^E から導かれた位相である．

一般には $L(E, F)$ は $\mathcal{F}(E, F)$ の閉集合ではないことを見るのは難しくない．このことに関して，読者に次の演習問題を出しておく．

演　習　問　題

32.1. $\mathcal{L}(E, F)$ によって，E から F への線形写像（連続でも不連続でもよい）の全体からなる $\mathcal{F}(E, F)$ の線形部分空間を表わす．$\mathcal{L}(E, F)$ は $\mathcal{F}(E, F)$ において（各点収束の位相に関して）閉であることを証明せよ．

32.2. E, F を局所凸 TVS とし，E は Hausdorff 空間であるとする．このとき，各点収束の位相に関して，$L(E, F)$ は $\mathcal{L}(E, F)$ において稠密であることを証明せよ．

32. 3. E が有限次元かつ Hausdorff のとき，$L(E, F)=\mathscr{L}(E, F)$ となることを示せ（定理 9.1 参照）[1].

32. 4. $\mathscr{L}(E, F)$ の双対は何か？[2]
この双対と Hahn-Banach の定理を用いて，$L(E, F)$ が $\mathscr{L}(E, F)$ において稠密なることの別証をあたえよ．ただし，E, F は局所凸で，E は Hausdorff とする．

一般的に言って．$L(E, F)$ の部分集合 A の $\mathscr{F}(E, F)$ における閉包は $L(E, F)$ には含まれない．すなわち，閉包をとれば，線形ではあるが不連続な写像を含むようになる．しかしながら，線形写像の同等連続集合を扱っている場合には，このことは起こらないのである．

命題 32.4. $L(E, F)$ の同等連続部分集合 H の F^E における閉包は，線形写像の同等連続集合である．

証　明　F^E における H の閉包を $\bar{H}$ とする．$\bar{H}$ は線形写像からなる集合である（演習問題32.1）．F における 0 の任意の近傍を V とし，W を F における 0 の近傍で $W+W \subseteq V$ となるものとする．これに対対して，H は同等連続だから，E における 0 の近傍 U が存在して $H(U) \subseteq W$ となる．U の任意の点 x をとれば，各 $v \in \bar{H}$ に対して $u \in H$ が存在して

$$u(x) \in v(x)-W$$

となる．これは単に，F^E における v の任意の近傍は H と交わるということである．この式は $v(x) \in u(x)+W$ と書けるが，$u(U) \subseteq W$ だから，$v(x) \in W+W \subseteq V$ を得る．x は U の任意の点だったから，これから $v(U) \subseteq V$ を得る．v は $\bar{H}$ の任意の元だから，これで証明ができた．

命題 32.5. E から F への線形写像の同等連続集合 H の上において，次の諸

1) E が有限次元でなくても，このことは起こり得る．たとえば $F=\mathbf{C}$ として，多項式の空間（LF-空間）と形式的巾級数の空間の双対性（22 章）を考えよ．

2) E の（線形空間としての）基底を $X=\{e;i \in I\}$ とし，φ を制限写像：$\mathscr{L}(E, F) \ni u \longmapsto u|X \in \mathscr{F}(X, F)$ とすれば，φ は $\mathscr{L}(E, F)$ から $\mathscr{F}(X, F)$ の上への TVS-同形写像となる（位相はともに各点収束の位相）．したがって，$\mathscr{L}(E, F) \cong \mathscr{F}(X, F) \cong F^*$．これを用いよ．

位相は一致する．

E の稠密な部分集合 A 上での各点収束の位相，

E 上の各点収束の位相，

E 上のコンパクト収束の位相．

証 明 1番目の位相と3番目の位相が H 上で一致することを示せば十分である．K を E の任意のコンパクト集合とし，V を F における0の任意の近傍としよう．W を F の0の近傍で，$W=-W$, $W+W+W\subseteq V$ なるものとする．E における0の近傍 U を，$U=-U$, $H(U)\subseteq W$ となるようにえらぶ．A は E において稠密だから，y が A を動くとき，集合 $U+y$ は E の被覆をなす．K はコンパクトだから，A の有限個の点 $y_1,\ldots,y_r$ が存在して

$$K\subseteq(U+y_1)\cup\cdots\cup(U+y_r)$$

となる．u_0 を H の任意の元として，集合

$$u_0+\mathcal{U}(\{y_1,\ldots,y_r\}\,;\,W) \tag{32.3}$$

の任意の元を u とする．x を K の任意の点とすると，適当な添字 j に対して $x\in U+y_j$ $(1\leqslant j\leqslant r)$ であるから，

$$u(x)-u_0(x)=[u(x)-u(y_j)]+[u(y_j)-u_0(y_j)]+[u_0(y_j)-u_0(x)]$$

と書いてみれば，右辺の第1と第3の括弧の中は W に属する．なぜなら，$x-y_j\in-U=U$ となり，$H(U)\subseteq W$ だからである．真中の括弧の中は W に属する．それは，u が集合 (32.3) に入っているからである．かくして $u(x)-u_0(x)\in W+W+W\subseteq V$. x は K の任意の点であったから，これは $u\in u_0+\mathcal{U}(K\,;\,V)$ を意味する．u は (32.3) の任意の元であったから，これで望む結果が得られた．

注意 32.1. 上の証明からわかることは，集合 K はコンパクト集合である必要はなく，単にプレコンパクトであればよかった（定義8.1）．したがって，命題32.5の陳述において，コンパクト収束の位相をプレコンパクト収束の位相でおきかえてもよい．

命題 32.6. E から F への線形写像の同等連続集合 H は，有界収束の位相に関して有界である．

証　明　証明すべきことは，$L_b(E\,;F)$ における 0 の任意の近傍によって H が吸収される（或いは‘呑みこまれる’）ことである．この 0 の近傍は $\mathcal{U}(B\,;V)$ の形であると仮定してよい．ただし，B は E の位意の有界集合であり，V は F における 0 の任意の近傍である．H は同等連続であるから，E における 0 の近傍が存在して，$H(U) \subseteq V$ となる．他方，数 $\lambda \neq 0$ が存在して $B \subseteq \lambda U$ となるから

$$\lambda^{-1}H(B) \subseteq H(U) \subseteq V$$

すなわち，

$$\lambda^{-1}H \subseteq \mathcal{U}(B\,;V) \text{ 或いは } H \subseteq \lambda\mathcal{U}(B\,;V) \qquad \text{(証終)}.$$

さて，この章の残りの部分では，線形形式の同等連続集合に主眼をおくことにする．すなわち，F が複素数体 **C** に等しい場合である．

命題 32.7. 一つの TVS E 上の連続線形汎関数の集合が同等連続になるためには，それが E における 0 の或る近傍の極集合に含まれていることが必要十分である．

極集合の概念については，定義 19.1 参照．

証　明　H を E 上の線形形式の同等連続集合としよう．D_ρ を複素平面において原点を中心とする半径 ρ の閉円板とする．このとき，E における 0 の近傍が存在して $H(U) \subseteq D_1$，となるが，これは丁度 $H \subseteq U^0$ を意味する．

次に，U を E における 0 の任意の近傍とし，$H = U^0$ とおいてみよう．このとき任意の $\rho > 0$ に対して，$H(\rho U) \subseteq D_\rho$を得る．したがって．この H およびその任意の部分集合は同等連続である．

命題 32.8. E 上の線形形式の同等連続集合の弱閉包[1] は E'_σ のコンパクト

1)　弱双対位相に関する閉包.

集合である．

証 明 H を E' の同等連続部分集合とする． H の E'_σ における閉包は，積空間

$$\mathbf{C}^E = \prod_{x \in E} \mathbf{C}_x, \ (\mathbf{C}_x \cong \mathbf{C}\,;\ \text{命題 32.4 参照})$$

における閉包に等しい．各 $x \in E$ に対して $H(x)$ を，x' が H の中を動くときの複素数 $\langle x', x \rangle$ の全体とする．

それは，積空間 $\mathbf{C}^E$ において，H の“座標軸” $\mathbf{C}_x$ への射影に標準的に同形である．ところで $H(x)$ はすべての x について $\mathbf{C}$ の有界集合である．実際，これは H が弱有界であることを意味することであるが， H は，もっと強く，強有界なことがわかっている，すなわち E'_b で有界であった (命題 32.6). かくして，$H(x)$ の $\mathbf{C}$ における閉包 $\overline{H(x)}$ は，すべての x について，$\mathbf{C}$ のコンパクト集合である．ここで，**Tychonoff の定理** (演習問題 6.1 参照) を用いよう．この定理は《$\{X_\alpha\}(\alpha \in A)$ をコンパクト位相空間の任意の族とするとき，積位相空間 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ もまたコンパクトである》ことを述べている．この定理を今の場合に適用すれば，

$$\prod_{x \in E} \overline{H(x)}$$

は $\mathbf{C}^E$ のコンパクト集合であり，H の閉包はこの集合の閉部分集合だから，やはりコンパクトとなる． (証終).

演 習 問 題

32.5. E をノルム空間とする．E の双対 E' において，同等連続集合と強有界集合は一致していることを証明せよ．

32.6. $\tau_a(a \in \mathbf{R}^n)$ によって平行移動写像 $f(x) \mapsto f(x-a)$ を表わす．命題 32.5 を用いて，次の結果を証明せよ．

定理 32.1. p を実数 $1 \leqslant p < +\infty$ とする．ベクトル $a \in \mathbf{R}^n$ が $\mathbf{R}^n$ において 0 に収束するとき，平行移動写像 τ_a は $L_\sigma(L^p(\mathbf{R}^n), L^p(\mathbf{R}^n))$ において恒等写像に収束する．

$p = +\infty$ のときは，どうであるか？

32.7. $\{\mu_k\}(k = 0, 1, \ldots)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の Radon 測度の列で，各測度の台は $\mathbf{R}^n$ の一定の

コンパクト集合Kに含まれているとしよう．また，一つの定数 $C>0$ が存在して，すべての $k \geqslant 0$ と $\mathbf{R}^n$ 上のすべての有界連続関数 f に対して

$$|\langle \mu, f\rangle| \leqslant C \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |f(x)|$$

が成り立つと仮定する．このとき，命題32.5を用いて，次のことを証明せよ：《列$\{\mu_k\}$が $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ において0に弱収束すれば，μ_k の Fourier 変換は $\mathbf{R}^n$ の各コンパクト集合上で一様に0に収束する》．

32.8. Eを可分な TVS (演習問題12.7参照)，A をその稠密な可算部分集合，Fを距離付け可能な TVS とする．このとき，A 上の各点収束の位相によって，$L(E, F)$ は距離付け可能な TVS となることを示せ (8章参照)．
この事実からの線形写像 $E \to F$ の同等連続集合の上では，E 上の各点収束の位相は距離によって定義できることを導け．

32.9. Eを可分な TVS とする．E 上の線形汎関数の弱閉同等連続集合に弱位相を入れたものは，距離付け可能なコンパクト空間になることを証明せよ (演習問題32.8を用いよ)．E 上の線形汎関数の同等連続無限列は，すべて E' において弱収束する部分列を含むことを証明せよ．(演習問題8.7を用いよ)．

32.10. Eを可分なノルム空間とする．$\{x'_k\}(k=1, 2,\ldots)$ を E' における無限点列で，x_k' のノルムはkに無関係な定数で押えられるならば，E' において弱収束する部分列を含むことを証明せよ (演習問題32.9を用いよ)．

32.11 Eを Hilbert 空間とする．Eにおける無限列 $\{x_k\}(k=1, 2,\ldots)$ で，そのノルム$\|x_k\|$がkに無関係に有界なものは，次の性質をもつ部分列 $\{x_{k_j}\}$ を含むことを証明せよ．すなわち：$x^0 \in E$ が存在して，すべての $x\in E$ に対して $(x^0|x)=\lim_{j\to\infty}(x_{k_j}|x)$.
(ヒント：Eは可分であると仮定してもよいことを示し，演習問題32.10を用いよ)．

余り適当な場所がないので，32章の付録のつもりで，空間 $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ の完備性についての結果をここに述べておこう．この結果の証明は全く簡単であるが，同時に，これは非常に重要な結果でもある．というのは，超関数の理論にでてくる多くの連続線形写像の空間，とくに最も重要な双対空間の完備性が，この結果から出るからである．

定理 32.2. E, Fを二つの局所凸 Hausdorff 空間とし，Fは完備とする．$\mathfrak{S}$を E の有界集合族で，$(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})$, $(\mathfrak{S}_{\mathrm{II}})$ を満たし，E の被覆になっているものとする．

さらに次の条件が成り立つとする．

(*) 線形写像 $u: E \to F$ の各 $A \in \mathfrak{S}$ への制限が連続ならば，u は連続である．

これらの仮定のもとでは，TVS $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ は完備となる．

証　明　$\mathscr{F}$ を $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ 上の Cauchy フィルターとする．したがって，$\mathscr{F}$ はもちろん各点収束の位相に関しても，Cauchy フィルターである．F は完備だから，$\mathscr{F}$ は一つの関数 $u: E \to F$ に各点収束する．この関数 u は線形である．なぜなら，線形性を定義する式の各々は有限個の点にしか関係しないからである．このとき，フィルター $\mathscr{F}$ は各集合 $A \in \mathfrak{S}$ 上で一様に u に収束する．実際，V, W を F における 0 の近傍であって，$V+V \subseteq W$ となるものとすると[1]，$\mathscr{F}$ は $\mathfrak{S}$-位相に関する Cauchy フィルターだから，$M \in \mathscr{F}$ が存在して，すべての $f, g \in M$ とすべての $x \in A$ に対して，

$$f(x)-g(x) \in V$$

が成り立つ．他方，A の任意の点 x_0 に対して，$M_1 \in \mathscr{F}$ が存在して，$h \in M_1$ ならば $h(x_0) \in V+u(x_0)$ となる．ところで，$M \cap M_1 \neq \emptyset$ だから，$g \in M \cap M_1$ をとれば，すべての $f \in M$ に対して

$$f(x_0) \in V+V+u(x_0) \subseteq W+u(x_0).$$

$x_0 \in A$ は任意の点だったから，これは $M-u \in \mathscr{U}(A; W)$ を意味する．すなわち，$\mathscr{F}$ は A 上で一様に u に収束する．u は A 上の連続関数のフィルターの一様収束の極限だから，u の A への制限は連続である．したがって，仮定 (*) により，u は連続線形写像となる．$\mathscr{F}$ が u に $\mathfrak{S}$-位相に関して収束することは，すでに述べたことから明らかである．　　(証終)．

系 1.　E を局所凸 Hausdorff 空間であって，E からもう一つの局所凸空間への線形写像が各有界集合上で有界ならば[2] つねに連続であるとする．このとき，任意の局所凸完備 Hausdorff 空間 F に対して，$L_b(E, F)$，とくに E'_b は

1) まず W を任意にとり，それから V をえらぶ

2) このとき，この写像を**有界写像**という（上巻 14 章 174 頁）

完備である.

証明 $\mathfrak{S}$ を E のすべての有界集合の族としたときに，性質(*)が成り立つことを示せば十分である．u を線形写像：$E \to F$ で，その各有界集合への制限が連続なものとする．このことから，u は有界集合を有界集合に写すことがわかる（このことの検証は読者に委せる[1]）．したがって仮定により u は連続である．

系1で仮定した性質をもつ空間（それを**有界型**[2] (bornological) 空間という）は非常に重要である．距離付け可能な空間および LF-空間が有界型なことは既知である（命題 14.8 と系）．かくして

系 2. E を距離付け可能な空間または LF-空間とし F，を任意の局所凸完備 Hausdorff 空間とすれば，$L_b(E, F)$ は完備である．とくに，E'_b は完備である．

系 3. 空間 $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$ (強双対位相を入れたもの) は完備である.

系 4. E を Fréchet 空間または LF-空間とするとき，任意の局所凸完備 Hausdorff 空間 F に対して，$L_c(E, F)$ は完備である．

系 4 の証明 条件(*)が満たされることを示そう．それには，線形写像 u の各凸コンパクト集合への制限が連続ならば，u は列的に連続なことを示せば十分

---

1) 次のように考えるとよい．A を E の有界集合として，$u(A)$ が F で有界なことを言えばよいのだが，A の閉凸平衡包をとっても有界だから，始めから A は閉凸平衡的としてよい．このとき，集合 A で張られる E の線形部分空間を E_A で表わせば，A が平衡的凸集合であることから，$E_A = \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$ となる．すなわち，A は E_A において吸収的である．そこで E_A における A のゲージ（上巻 80 頁）を $\| \ \|_A$ で表わせば，$(E_A, \| \ \|_A)$ はノルム空間となり，このノルムによる位相は E から導かれるものより細かい．u の A への制限が連続であったから，u の E_A への制限を考えれば $u: E_A \to F$ は連続となる（E_A にはノルムによる位相を入れている）．A は E_A の単位球だから有界であり，したがってその連続写像 u による像 $u(A)$ は F で有界となる．

2) 次のように定義しても同じである．E を TVS とするとき，E の平衡的凸部分集合 T であって，任意の有界集合 B に対して数 $\lambda \neq 0$ が存在して，$B \subseteq \lambda T$ となるものを**食有界集合** (bornivore) とよぶ．食有界集合はすべて 0 の近傍となるとき，E を有界型という．(E が局所凸であることを定義に含めることが多い.)

である（それから，命題 8.5 および 14.7 を適用すればよい）．ところで，S を E において一点 x_0 に収束する列とすれば，集合 $S\cup\{x_0\}$ はコンパクト集合であり，したがって，その閉凸包はコンパクトである（命題 7.11 の系）．この集合への u の制限が連続だから，$u(s)$ は $u(x_0)$ に収束する．（証終）．

定理 32.5 の直接の系として定理 11.5 を得る（これはすでに直接証明した）．定理 11.5 の述べるところは，E がノルム空間，F が Banach 空間ならば，$L(E, F)$ に作用素のノルム

$$L(E, F)\ni u\mapsto\|u\|=\sup_{x\in E, \|x\|=1}\|u(x)\|$$

を入れたものは Banach 空間になるということである．ここで，E および F におけるノルムはともに $\|\ \|$ で示した．とくに，ノルム空間の双対は Banach 空間である（定理 5.11 の系）．

33.

樽型空間
Banach-Steinhaus の定理

次のことを思い出そう．位相ベクトル空間 E の部分集合 T が**樽**（定義 7.1）であるとは，それが吸収的（定義 3.1），凸，平衡的（定義 3.2）かつ閉なことであった．

定義 33.1． 位相ベクトル空間 E が**樽型空間** (barreled space) であるとは，E において樽がすべて 0 の近傍になることを言う．

樽型空間は局所凸とは限らない．それが局所凸になるためには，樽からなる 0 の基本近傍系が存在することが必要十分である．しかしながら，多くの書物では，樽型空間の定義に局所凸性を含めている．

命題 33.1． E を樽型空間とし，M を E の線形部分空間とすれば，商空間 E/M は樽型である．

証　明　$\dot{T}$ を E/M の樽とすれば，E から E/M の上への標準的準同形写像 π によるその逆像 T も樽となる．したがって，T は E における 0 の近傍である．ところで，E における 0 の近傍の π による像は E/M における 0 の近傍であり，$\dot{T}=\pi(T)$ であるから，$\dot{T}$ は E/M における 0 の近傍である．

樽型空間の線形部分空間は樽型であるとは限らない．樽型空間の積空間が樽型になることは証明できる．

命題 33.2 Baire 空間となる TVS は樽型空間である．

ここで，Baire 空間とは次の性質 (B) をもつ位相空間であったことを思い出そう．

(B)　内点をもたない閉集合の任意の可算族の合併は内点をもたない．

命題 33.2 の証明　E を Baire TVS，T を E における樽とする．T は吸収的かつ平衡的だから，$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} kT$ である．各集合 kT は閉集合だから，少なくともその一つは内部が空でない．ところで，$x\mapsto k^{-1}x$ は位相同形写像だから，T 自身が少なくとも一つ内点をもつ．それを x_0 としよう，$x_0=0$ ならば，T は 0 の近傍である．$x_0\neq 0$ とすれば，$-x_0$ もまた T の内点である [1] が，任意の TVS において凸集合の内部は再び凸集合であり（命題 7.1），したがって x_0 と $-x_0$ を結ぶ線分上の点はすべて T の内点である．とくに，原点も T の内点である．　(証終)．

系 1. Fréchet 空間は樽型空間である．

系 2, Banach 空間および Hilbert 空間は樽型空間である．

系 3. LF-空間は樽型空間である．

系 1，系 2 は明らかだから，系 3 だけを証明すればよい．E を Frechet 空間の列 $\{F_k\}$ $(k=0, 1,\dots)$ の狭義帰納極限とする (13 章参照)．T を E の樽とすれば，$T\cap F_k$ は明らかに F における樽である $(k=0, 1, \dots)$．したがって，各 k について $T\cap F_k$ は F_k における 0 の近傍となる．T は凸であったから，これは T が E における 0 の近傍になることを意味する．

樽型空間の重要性は，主として次の結果にもとづく．

1)　$x\mapsto -x$ は位相同形写像であり，$T=-T$ だから．

定理 33.1. E を樽型 TVS, F を局所凸空間とするとき, E から F への連続線形写像の空間 $L(E, F)$ の部分集合 H に関して, 次の三条件は同値である.

(a) H は各点収束の位相に関して有界である.

(b) H は有界収束の位相に関して有界である.

(c) H は同等連続集合である.

証明 (b) ⇒ (a) は明白. (c) ⇒ (b) はすでに証明した (命題 32.6). これらはともに, E が樽型であってもなくても, 一般に成り立つこと注意しよう. したがって, 定理 33.1 を証明するには, (a) ⇒ (c) を示せばよい. ここで, E が樽型であることを用いる. H を $L_\sigma(E, F)$ の有界集合としよう. 証明すべきことは, V を F における 0 の任意の近傍とするときに, $H^{-1}(V)$ が E における 0 の近傍となることである. F は局所凸であったから, V は樽であるとしてよい (命題 7.2). さて, u を E から F への任意の連続線形写像とすれば, $u^{-1}(V)$ は明らかに樽であり,

$$H^{-1}(V) = \bigcap_{u \in H} u^{-1}(V)$$

であることから, $H^{-1}(V)$ が凸, 平衡的かつ閉であることが直ちにわかる. H が各点収束の位相に関して有界であることからは, $H^{-1}(V)$ が吸収的であることが出る[1]. かくして, $H^{-1}(V)$ は樽であり, したがって E における 0 の近傍となる. これで証明は完成する. $H^{-1}(V)$ が吸収的なることの証明を述べよう. x を E の任意の元とする. u が H の中を動くときの F の元 $u(x)$ の集合 $H(x)$ は有界であるから, 数 $\lambda > 0$ が存在して $H(x) \subset \lambda V$. これは $x \in \lambda H^{-1}(V)$ を意味する. (証終).

次の系は, しばしば **Banach-Steinhaus の定理**として引用される.

系. E を樽型空間, F を局所凸 Hausdorff 空間とする. $\mathcal{F}$ を $L(E, F)$ 上の

1) すぐ後に証明がある.

フィルターであって，E から F への線形写像[1] u_0 に各点収束するものとする．さて，$\mathscr{F}$ は次の二条件のうちの一つを満足すると仮定する．

(33.1)　$\mathscr{F}$ に属する集合 H で，各点収束の位相に関して有界なものが存在する．

(33.2)　$\mathscr{F}$ は可算基底をもつ．

このとき，u_0 は E から F への連続写像となり，$\mathscr{F}$ は u_0 に $L_c(E, F)$ において収束する（すなわち，E の各コンパクト集合上で一様に収束する）．

証　明　(33.1) が成り立つと仮定しよう．このとき，H は同等連続集合となり，u_0 は F^E における H の閉包 $\bar{H}$ に属する．$\bar{H}$ も E から F への線形写像の同等連続集合となるから（命題32.4），u_0 は連続であって，$\mathscr{F}$ は u_0 に $L_\sigma(E, F)$ において収束する．命題32.5によれば，このとき $\mathscr{F}$ は u_0 に $L_c(E, F)$ で収束する（$H \in \mathscr{F}$ だから，$\mathscr{F}$ が $L_c(E, F)$ において u_0 に収束するということと，$\mathscr{F}$ によって $\bar{H}$ 上に導かれるフィルターが $\bar{H}$ にコンパクト収束の位相を入れた空間において u_0 に収束すると言うことは，全く同じことになる）．

次に (33.2) が成り立つと仮定してみよう．$\{M_1, M_2, \ldots\}$ を $\mathscr{F}$ の可算基底とする．各 $k = 1, 2, \ldots$ について，M_k から一つの元 u_k をえらぶ．仮定により，各 $x \in E$ に対して，列 $\{u_k(x)\}$ は F において収束する（その極限はもちろん $u_0(x)$ である）．これは，連続写像の集合 $\{u_k\}$ が $L_\sigma(E, F)$ において有界なことを意味する．

したがって，この列に付随するフィルターが (33.1) の性質をもつ．ゆえに，前半の証明によって，u_0 は連続であり，u_k は u_0 に $L_c(E, F)$ において収束する．そこで，$L_c(E, F)$ における u_0 の一つの近傍を $\mathscr{U}$ とし，集合 M_k のどれもが $\mathscr{U}$ には含まれないと仮定してみよう．すると，任意の k について，M_k の元 u_k で $\mathscr{U}$ に含まれないものがとれる．これは矛盾である．なぜなら，そのような列 $\{u_k\}$ はすべて $L_c(E, F)$ において u_0 に収束するはずだったからである．したがって，どれかの M_k は必ず $\mathscr{U}$ に含まれる（証終）．

---

1)　連続性を仮定して<u>いない</u>ことに注意．

F が複素数体に等しい場合には，定理 33.1 はもっと強い形になる．

定理 33.2. E を樽型 TVS とすれば，E の双対 E' の部分集合 H に対する次の諸条件は同値になる．

(a) H は弱有界．

(b) H は強有界．

(c) H は同等連続．

(d) H は弱相対位相に関して相対コンパクト．

証明 三条件 (a), (b), (c) の同値性は定理 33.1 からしたがう．他方，(d) から (a) が出ることは明らか．したがって，(c) から (d) の出ることを示せば十分である．ところで，これはすでに証明済みである (命題 32.8)．

定理 33.1 および 33.2 の応用の一つとして，樽型空間でないノルム空間の例を挙げよう．

例 33.1. $\mathscr{C}_c^0$ を実直線 $\mathbf{R}^1$ 上のコンパクトな台をもつ連続関数の空間とする．この空間にノルムとして，最大値ノルム $\|f\| = \sup_{t\in\mathbf{R}^1}|f(t)|$ を考えよう．このようにして得られるノルム空間を E で示すことにする．E は Banach 空間ではない．実際，E は完備でなく，E の完備化は $\mathbf{R}^1$ の連続関数であって無限遠で減少するもの全体のなす空間と同一視することができる．さて，E 上の連続線形汎関数の列

$$x_k' : f \mapsto kf(k), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

を考えよう．各 $f \in E$ はコンパクトな台をもつ関数だから，十分大きい k に対しては $f(k) = 0$ である．これは，列 $\{x_k'\}$ が 0 に弱収束することを意味する．ところで，この線形汎関数の集合が強有界でないことは明らかである．実際，$\|x_k'\| = k$ (ここで $\|\ \|$ は E の強双対におけるノルム) が成り立つからである．かくして，E は樽型空間ではない．なぜなら，樽型であるとすれば，定理 33.2 と矛盾するからである．

注意 33.1. 列 33.1 のノルム空間 E は，命題 33.2 によって，Baire 空間では

ないことがわかる.

演 習 問 題

33.1. 数列から残るノルム空間であって，樽型でない空間の例を挙げよ.

33.2. 閉区間 [0, 1] 上の複素数値連続関数全体のなす Banach 空間を E とする．ノルムは，$\|f\| = \sup_{0\leq t\leq 1}|f(t)|$ である．$\sigma = (\sigma_n)$ を複素数列であって，すべての $f\in E$ に対して

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|\sigma_n c_n(f)|<+\infty$$

が成り立つものとする．ここで，$c_n(f)$ は f の n 番目の Fourier 係数，すなわち

$$c_n(f) = \int_0^1 e^{2i\pi nt} f(t)\,dt$$

とする．Banach–Steinhaus の定理を用いて，$f\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n c_n(f)$ は E 上の連続線形汎関数になることを証明せよ.

33.3. E を Baire TVS，F を任意の TVS とする．各点収束の位相に関して有界となるような $L(E, F)$ の部分集合は同等連続であることを証明せよ.

33.4. E を局所凸 Hausdorff 空間，E' をその双対とする．E' の弱有界集合がすべて同等連続ならば，E は樽型空間になることを証明せよ.

33.5. E を Fréchet 空間，E' をその双対とする．E' には有界集合（弱でも強でもよい；それらは同一である）の可算基底が存在することを証明せよ.

34.

Banach-Steinhaus の定理の応用

34.1. Hilbert 空間への応用

E をHilbert 空間とし，$\bar{E}'$ をその反双対 (12 章 142 頁参照) として，E から $\bar{E}'$ の上への標準的等距離写像を J で表わすことにする．反線形形式の複素共役は線形形式になるから，複素共役をとるという作用素は，$\bar{E}'$ から E の双対 E' の上への 1 対 1 の反線形写像である．この写像と標準的等距離写像 J との合成写像をとることによって，E からその双対の上への標準的反線形等距離写像を得る．これを $\bar{J}$ で表わす．そうすれば，E 上の弱位相は，E'_σ から位相を $\bar{J}$ によって写したものとなる．たとえば，E の点列 $\{x_k\}$ が E において x に弱収束するとは，すべての $y \in E$ に対して，内積 $(x_k|y)$ が $(x|y)$ に収束することとなる (ただし，(|) は E の Hilbert 構造を定義する準双線形形式とする；E におけるノルムは $\| \ \|$ で示す；$\|x\|^2 = (x|x)$ である).

命題 34.1. Hilbert 空間 E の単位球 $\{x \in E; \|x\| \leqslant 1\}$ は弱コンパクトである．

証　明　まず，E の単位球が弱閉であることの証明から始めよう．x を単位球の弱閉包に属する元として，$\{x_k\}(k = 1, 2, \ldots)$ をノルム $\leqslant 1$ で x に弱収束する点列としよう[1]．とくに，数列 $(x_k|x)$ は $(x|x) = \|x\|^2$ に収束する．すべての

---

1) 弱位相は，有限次元の場合を除いて，距離付け可能ではないから，フィルターを用いるか，Hahn-Banach の定理を用いて直接証明するかのどちらかであろう．ここでは，点列の替りにフィルターと思って読めばよい．

k について $|(x_k, x)| \leqslant \|x\|$ だったから，$\|x\|^2 \leqslant \|x\| \leqslant 1$ である．

次に Banach–Steinhaus の定理を双対空間に適用すること (定理 33.2) により，E' の単位球は E' 上の弱位相に関して相対コンパクトであることがわかる．その $\bar{J}^{-1}$ による像が E の単位球だから，それは弱相対コンパクトでなければならない．すでに弱閉なことがわかっているから，これで証明は終る．

すでに述べた (演習問題 32.11) 次の結果を思い出そう．《$\{x_k\}$ を E の点列で，$\|x_k\|$ が k に無関係に有界であるとすれば，部分列 $\{x_{k_j}\}$ が存在して弱収束する》．

注意 34.1. Hilbert 空間 E は無限次元であるとして，$\{e_k\}$ を E における正規直交列 (上巻 149 頁) とすると，《点列 $\{e_k\}$ は (部分列をとらなくても) 0 に弱収束する》．実際，Bessel の不等式により，すべての $x \in E$ について

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

が成り立つから，数列 $|(x|e_k)| \geqslant 0$ は 0 に収束しなければならない．

とくに，無限次元 Hilbert 空間では，原点 0 は単位球面 $\{x; \|x\| = 1\}$ の弱閉包に含まれる．

定理 33.2 から，次の **Osgood の定理**も導かれる．

命題 34.2. Hilbert 空間 E における点列 $\{x_k\}$ が弱収束するならば，定数 $C > 0$ が存在して，$\|x_k\| \leqslant C$ がすべての k について成り立つ[1]．

実際，列 $\{x_k\}$ は弱相対コンパクトだから，強有界である．

34.2. 積空間における分離連続関数への応用

位相空間 T が距離付け可能とは，その位相が一つの距離によって定義できるときに言う．

定理 34.1. T を距離付け可能な位相空間とし，E を距離付け可能な樽型

---

1) ここで，列をフィルターにすると，一般には成り立たない．

TVS, F を局所凸空間, M を $E\times T$ から F への写像からなる一つの集合とする. 次の仮定をおく,

(34.1) 各 $t_0\in M$ に対して, 写像の集合 $x\mapsto f(x, t_0)$, $f\in M$ は E から F への線形写像の同等連続集合である.

(34.2) 各 $x_0\in E$ に対して, 写像の集合 $t\mapsto f(x_0, t)$, $f\in M$ は T から F への写像の同等連続集合である.

これらの仮定のもとで, 集合 M は同等連続となる.

ここで注意すべきことは, T には線形構造がなく, T は単なる位相空間であって, その位相が距離によって定義できると言うことしか仮定していないことである. 定理 34.1 の証明に, 次の初等的な補題を用いる.

補題 34.1. A を距離付け可能な位相空間, F を TVS, H を A から F への写像から成る一つの集合とする. A において点列 $\{a_n\}$ が極限 a に収束するとき, つねに $f\in H$ について一様に, $\{f(a_n)\}$ が $f(a)$ に F において収束するとするならば, H は同等連続集合である[1].

補題 34.1 の証明 a を A の任意の点とする. 証明すべきことは, F における 0 の任意の近傍 V に対して, A において a の近傍 U が存在して, すべての $f\in H$ とすべての $x\in U$ について

$$f(x)-f(a)\in V$$

となることである. このことが成り立たないと仮定して見よう. $\{U_k\}$ を A における a の近傍の基底であって, $U_k\subseteq U_{k-1}$ $(k=1, 2,\ldots)$ とする. このとき, 適当な V が存在して, すべての k に対して点 $a_k\in U_k$ と写像 $f_k\in H$ が存在して, $f_k(a_k)-f(a)\notin V$ となるはずである. 点列 $\{a_k\}$ は明らかに, A において, a に収束する. したがって, 仮定により, F における 0 の任意の近傍 W に対して, 整数 $k(W)>0$ が存在して, すべての $f\in H$ とすべての $k\geqslant k(W)$ について $f(a_k)-f(a)\in W$ となる. ここで $W=V$, $k\geqslant k(W)$, $f=f_k$ とすれば,

---

1) 標語的に言うならば, A が距離付け可能のときには, 《列的に同等連続ならば同等連続になる》ということである,

矛盾に到達する．

定理 34.1. の証明　定理 34.1 の陳述に現われる積空間 $E\times T$ は距離付け可能なことに注意しよう．証明のためには，補題 34.1によって，$E\times T$ において任意の一点 (x_0, t_0) に収束する任意の点列 (x_k, t_k) $(k=1,2,\ldots)$ に対して，すべての $f\in M$について一様に，$f(x_k, t_k)$ が $f(x_0, t_0)$ に F において収束することを示せば十分である．

f_{t_k}によって，E から F への写像 $x\mapsto f(x, t_k)$ を示すことにしよう．仮定 (34.1) の言うところは，k を固定したときに，f が M の中を動くとして，これらの写像が同等連続になることである．さて，$k=0, 1, 2,\ldots$ が動き，f が M を動くとき，写像 $f_k-f_{t_0}$ の集合は $L_\sigma(E, F)$ において有界であることを示そう．(σ: 単純収束の位相)．

実際 x を E の任意の点としよう．示すべきことは，集合 $N_x=\{f(x, t_k)-f(x, t_0)\,;\ k=1,2,\ldots\,;\ f\in M\}$ が F において有界なことである．V を F における 0 の任意の近傍とする．このとき，数 $\lambda>0$ が存在して，$N_x\subseteq\lambda V$ となることを示さなければならない．ところで，(34.2) によれば，整数 $k(x)\geqslant 1$ が存在して，$k\geqslant k(x)$ ならば $f_{t_k}(x)-f_{t_0}(x)\in V$ となる．他方．$t\in T$ を固定して，f が M を動くとき，元 $f_t(x)$ の集合は F において有界となる．これは，(34.1) と $L(E, F)$ の同等連続集合は $L_\sigma(E, F)$ の有界集合となる事実（命題 32.7) とによる．したがって，有限個の集合 $\{f_{t_k}(x)-f_{t_0}(x);\ f\in M\}$, $k=1,2,\ldots, k(x)$ を合併しても F において有界である．これらのことからただちに，$\{f_{t_k}-f_{t_0}\,;\ f\in M,\ k=1,2,\ldots\}$ が $L_\sigma(E, F)$ が有界なことがわかる．

さて，今まで用いなかったこと：E が樽型空間であることを利用すれば，線形写像の集合 $\{f_{t_k}-f_{t_0}\,;\ f\in M,\ k=1,2,\ldots\}$ は σ- 有界だから，それは同等連続となる (定理 33.1)．したがって，F における 0 の任意の近傍 V に対して，E における 0 の近傍 U が存在して

$$(f_{t_k}-f_{t_0})(U)\subseteq V$$

がすべての $f\in M$とすべての $k=1,2,\ldots$について成り立つ．このとき，次の

ように書けることに注目しよう.

$$
\begin{aligned}
f(x_k, t_k)-f(x_0, t_0) &= [f(x_k, t_k)-f(x_k, t_0)] \\
&\quad +[f(x_k, t_0)-f(x_0, t_0)] \\
&= [f(x_k-x_0, t_k)-f(x_k-x_0, t_0)] \\
&\quad +[f(x_0, t_k)-f(x_0, t_0)]+[f(x_k, t_0)-f(x_0, t_0)]
\end{aligned}
$$

そこで $k_0 \geqslant 1$ を十分大きくえらんで，すべての $k \geqslant k_0$ について

$$x_k-x_0 \in U$$

が成り立ち，また，すべての $f \in M$ について

$$f(x_k, t_0)-f(x_0, t_0) \in V \ ((34.1) \text{ を用いて})$$

$$f(x_0, t_k)-f(x_0, t_0) \in V \ ((34.2) \text{ を用いて})$$

となるようにする．かくして，$k \geqslant k_0$ ならば，すべての $f \in M$ について

$$f(x_k, t_k)-f(x_0, t_0) \in V+V+V$$

を得るが，これが証明すべきことであった[1].

定理 34.1 から出る結果のうちで，最重要なものの一つは次の系である.

系 E を Fréchet 空間，E_1 を距離付け可能な TVS, F を局所凸空間とする．このとき，$(x, y) \mapsto f(x, y)$ を $E \times E_1$ から F への**分離連続** (separately continuous) 双線形写像とすれば，f は連続になる.

f が分離連続という意味は：任意の固定した $x_0 \in E$ に対して E_1 から F への線形写像 $y \mapsto f(x_0, y)$ が連続であり，任意の固定した $y_0 \in E$ に対して E から F への線形写像 $x \mapsto f(x, y_0)$ が連続になるということである[2].

34.3. $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ の完備部分集合

定義 34.1. TVS E が**準完備** (quasi-complete) であるとは，E の任意の有界閉集合が完備なことを言う.

---

1) F の任意の 0 の近傍 W に対して，$V+V+V \subseteq W$ となる V があるから.

2) 連続ならばもちろん分離連続であるが，逆は一般には，正しくない (41 章参照).

完備ならば明らかに準完備であるが，準完備であって完備でない TVS が存在する[1]．しかしながら，次のことが成り立つ．

命題 34.3. 距離付け可能な空間 E が準完備ならば，それは完備である．

証　明　E において任意の Cauchy 列が収束することを示せば十分である(命題82)．ところで，Cauchy 列の閉包は有界集合であったから（命題14.1の系），これから求める結果がえられる．

定理 34.2. E, F を二つの TVS とし，$\mathfrak{S}$ を E の有界集合の族で条件 $(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})$，$(\mathfrak{S}_{\mathrm{II}})$ (414 頁) を満たすものとする．さらに，F は Hausdorff かつ準完備とし，$\mathfrak{S}$ は E の被覆になっているとする．

このとき，$L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ の任意の同等連続閉集合 H は完備である．

証　明　Φ を H 上の Cauchy フィルターとし，x を E の任意の点とする．$L(E, F)$ から F への写像 $u \mapsto u(x)$ による H の像を $H(x)$ で表わし，M が Φ の中を動くときの集合 $M(x)$ の族を $\Phi(x)$ で表わす．このとき，$\Phi(x)$ は $H(x)$ 上の Cauchy フィルター基底になっていることを示そう．これがフィルター基底になっていることは明らかである．$\mathfrak{S}$ は E の被覆だから，$\mathfrak{S}$ に属する集合 A で x を含むものが存在する．いま V を F における 0 の任意の近傍として，$\mathcal{U}(A ; V)$ を写像 $u \in L(E, F)$ で $u(A) \subseteq V$ となるもの全体のなす集合とすると，集合 $M \in \Phi$ が存在して，$M-M \subseteq \mathcal{U}(A ; V)$ となる．したがって，$M(x)-M(x) \subseteq V$ を得る．

H は同等連続であったから，H は各点収束の位相に関して有界である（命題37.2)．すなわち，すべての $x \in E$ に対して $H(x)$ は F において有界であり，したがってその閉包 $\overline{H(x)}$ もまた有界となる．ゆえに，仮定によって，$\overline{H(x)}$ は完備である．したがって，$\overline{H(x)}$ 上に $\Phi(x)$ によって生成されるフィルターは $\overline{H(x)}$ 上の一意的に定まる点 $u_0(x)$ に収束する（一意性は F が Hausdorff なことによる)．かくして，E から F への写像 u_0 が定義されるが Φ が E において各点

1) たとえば，無限次元 Hilbert 空間に弱位相を入れたもの．

毎に u_0 に収束することが証明された．とくに，このことから，u_0 は F^E において H の閉包に属することがわかるが，H は E から F への線形写像の同等連続集合であったから，$u_0 \in L(E, F)$ を得る（命題 32.4）．

残るところは，Φ が u_0 に $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ において収束することの証明である．この証明は，$L(E, F)$ 上の $\mathfrak{S}$–位相に関する 0 の基本近傍系として，各点収束の位相に関して閉じている近傍からなるもの（たとえば $A \in \mathfrak{S}$, V：F の 0 の閉近傍としたときの $\mathcal{U}(A\,;V)$ からなるもの）が存在するという事実と次の一般的な補題による．

補題 34.2. $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ を同じベクトル空間 G 上の二つの位相とし共に G の線形構造と整合するものとする．さらに $\mathcal{T}'$ は $\mathcal{T}$ よりも細かいとし $\mathcal{T}'$ に関する 0 の基本近傍系として，$\mathcal{T}$ に関する閉集合から成るものが存在すると仮定する．

このとき，A を G の部分集合とし，Φ を A 上のフィルターであって，$\mathcal{T}'$ に関しては Cauchy フィルターであり，$\mathcal{T}$ に関しては 1 点 $x \in A$ に収束するものとすれば，Φ は点 x に $\mathcal{T}'$ に関しても収束する．

補題 34.2 の証明 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{T}'$ に関する G の 0 の基本近傍系とし，$\mathcal{B}$ の各元は $\mathcal{T}$ に関して閉集合であるとする．$\mathcal{B}$ のに属する近傍はすべて対称であるとしてよい（V が対称とは $V=-V$ となること）．各 $V \in \mathcal{B}$ に対しては，$M \in \Phi$ が存在して，$M-M \subseteq V$ となる．したがって，任意の $y \in M$ について $M \subseteq y+V$ が成り立つ．他方 x は $\mathcal{T}$ に関して Φ の極限点だから，Φ に属する任意の集合の（$\mathcal{T}$ に関する）閉包に属する．とくに M の閉包に属するから，したがって $y+V$（これは閉集合）に属する．ところが，$x \in y+V$ は $y \in x+V$ を意味する（なぜなら V は対称だから）．y は M の任意の点であったから，$M \subseteq x+V$. V は $\mathcal{B}$ の任意の元であるから，これは Φ が $\mathcal{T}'$ に関して x に収束することを示している．

定理 34.2 から幾つかの重要な結果を導こう．

系 1. E, Fを二つの TVS とし，Fは Hausdorff かつ準完備とする．AをEの稠密な部分集合，Hを$L(E, F)$の同等連続集合とする．ΦをH上のフィルターとし，Aの各点においてAからFへの一つの写像u_0に収束するとする．このとき，u_0はEからFへの連続線形写像$\tilde{u}_0$に一意的に延長できて，$\tilde{\Phi}$は$\tilde{u}_0$に$L_c(E, F)$において収束する．

この証明には，命題 32.5 を二度適用する．まず，ΦはA上の各点収束の位相に関する Cauchy フィルターであるが，命題 32.5 によって，E上の各点収束の Cauchy フィルターにもなることに注意する．したがって (定理 34.2 により)，$\tilde{u}_0 \in \bar{H}$ ($\bar{H}$はF^EにおけるHの閉包である) に収束する (命題 32.4). $\bar{H}$も同等連続だから，再び命題 32.5 によって，Φは$\tilde{u}_0$にコンパクト収束の位相で収束する．

次の系の証明には，Banach-Steinhaus の定理を用いる．

系 2. Eを樽型 TVS, Fを局所凸 Hausdorff TVS とする．$\mathfrak{S}$がEの被覆になっているならば，$L_{\mathfrak{S}}(E, F)$は Hausdorff かつ準完備である．

言うまでもなく，$\mathfrak{S}$は ($\mathfrak{S}_{\text{I}}$), ($\mathfrak{S}_{\text{II}}$) を満足する有界集合族とする．

$\mathfrak{S}$がEの被覆になっているから，$L(E, F)$上の$\mathfrak{S}$-位相は各点収束の位相よりも細く，したがって$L(E, F)$の部分集合のうち$\mathfrak{S}$-位相で有界なものはすべて各点収束の位相でも有界になる．Eは樽型空間だから，そのような集合は同等連続である．もしその集合が閉集合であればそれは定理 34.2 によって完備である．

34.4. Montel 空間の双対

次の定義を導入しよう

定義 34.2. TVS Eが **Montel 空間** (Montel space) であるとは，Eが局所凸 Hausdorff かつ樽型であって，その有界閉集合がすべてコンパクトなときにいう．

Haundorff TVS のコンパクト集合は完備だから (命題 6.8 の系 1), Montel 空間はすべて準完備である (定義 34.1). ノルム空間が Montel でなるのは，それが有限次元のときに限る. 実際. ノルム空間が Montel 空間ならば，その閉単位球がコンパクトになるから，それは局所コンパクト空間となるが，局所コンパクト TVS は有限次元になるからである (定理 9.2).

次の命題の例からわかるように，(無限次元の) Fréchet 空間で Montel 空間になるものが存在する.

命題 34.4. 空間 $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, ($\Omega$: $\mathbf{R}^n$ の開集合), $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, $H(\mathcal{Q})$($\mathcal{Q}$: $\mathbf{C}^n$ の開集合) は Montel 空間である.

$\mathscr{S}$ と H の定義について，10 章例 IV と例 II 参照. 命題 34.4 は ($\mathscr{C}^\infty$ については) 定理 14.4, ($\mathscr{C}_c^\infty$ については) 定理 14.4 の系 2, ($\mathscr{S}$ については) 定理 14.5, (H については) 定理 14.6 の直接の結果である.

Fréchet 空間であって. Banach 空間でも Montel 空間でもないものが存在する (演習問題 34.4 参照).

定義 34.2 から出る最初の結果は次のものである

命題 34.5. E を Montel 空間, F を TVS とする. $L(E, F)$ において, E 上のコンパクト収束の位相と E 上の有界収束の位相と E 上の有界収束の位相は一致する.

実際, B を E の任意の有界集合とし, V を F の 0 の閉近傍とするとき (414 頁の記号を用いれば) $\mathscr{U}(B\,;\,V) = \mathscr{U}(\bar{B}\,;\,\bar{V})$ が成り立つ. なぜなら, $u(B) \subseteq V$ なら明らかに $u(\bar{B}) \subseteq \bar{V} = V(u \in L(E, F))$ だからである. ところで, E は Montel 空間だから, $\bar{B}$はコンパクトである. (証終).

命題 34.6. E を Montel 空間とすれば, その強双対 E'_b の有界閉集合はすべて E'_b でコンパクトである. さらに, E'_b の有界集合上では, 強位相と弱位相は一致する.

証　明　B' を E'_b の有界集合とすると，定理 33.2 によって，B' は同等連続集合である，命題 32.5 によれば，B' 上で弱位相とコンパクト収束位相が一致するから，命題 34.5 により，それは強双対位相とも一致する．これで命題の陳述の最後の部分が証明された．

そこで B' は強有界であるだけでなくて強位相で閉じているとしよう．$\overline{B'}$ をその弱閉包とする．B' は同等連続だから，その弱閉包は同等連続かつ弱コンパクトである (命題 32.8)．したがって，証明の前半 (命題の陳述の最後の部分) により，$\overline{B'}$ 上では強位相と弱位相が一致する B' は $\overline{B'}$ において弱稠密であったから，強稠密でもあり，したがって $\overline{B'}=B'$ を得る．かくして B' は弱コンパクト，したがって強コンパクトである．(証終)．

系 1. Montel 空間 E の双対 E' においては，弱収束列はすべて強収束する．

E' における弱収束列 S'_0 にその極限 x_0' を付加したものを S' とする．集合 S' は弱コンパクトだから，それは強有界となる．(これは E が樽型だから)．したがって，命題 34.6 により，S' 上では弱位相と強位相が一致する．ゆえに，S'_0 は x'_0 に強収束する．

系 2. 強双対空間 $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$(Ω : $\mathbf{R}^n$ の開集合)，$\mathcal{S}'$, $H'(\mathcal{Q})$($\mathcal{Q}$: $\mathbf{C}^n$ の開集合) においては，弱収束列はすべて強収束列である．

証明には，系 1 と命題 34.4 を組合せれば十分である．ここで，この系 2 と無限次元ノルム空間の双対での事情との著しい差違に注目しよう．たとえば，無限次元 Hilbert 空間の場合，無限正規直交列は 0 に弱収束する (注意 34.1)．しかし強収束 (すなわち，ノルムの意味での収束) はしないことは明らかである．なぜなら，ノルムが 1 で直交する二つの元 x, y に対して

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2=2$$

となるからである[1]．

---

1)　すなわち，Cauchy 列にはなり得ない．

演 習 問 題

34.1. Banach 空間 E 上の連続線形形式の列 $\{x'_n\}(n=0,1,\ldots)$ で，E の稠密な集合 A 上の各点収束の位相では 0 に収束するが，E 上の各点収束の位相では 0 に収束しない例を挙げよ（ヒント：例 33.1 を利用せよ）.

34.2. Θ を距離付け可能な局所コンパクト空間とする（すなわち，Θ の各点はコンパクトな近傍をもち，Θ の位相は距離によって定義できるとする）. E を樽式 TVS，F を局所凸 Hausdorff 空間とする．いま，$t\mapsto x(t)$ および $t\mapsto A(t)$ をそれぞれ，Θ で定義されて値を E および $L_\sigma(E,F)$ にとる連続関数とする，このとき，$t\mapsto A(t)x(t)$ は Θ から F への連続写像となることを証明せよ.

34.3. Θ を距離付け可能な位相空間とし，t_0 を Θ の 1 点とする．$t\mapsto T(t)$ を Θ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の超関数の空間 $\mathcal{D}'(\Omega)$ への一つの写像とする．さらに，各テスト関数 $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して，複素数 $\langle T(t),\varphi\rangle$ は $t\to t_0$ のとき収束すると仮定する．このとき，$t\to t_0$ ならば，超関数 $T(t)$ は Ω 上の一つの超関数 T_0 に強収束することを証明せよ.

34.4. Ω を $\mathbf{R}^n$ の空でない開集合とする．$k\geqslant 0$ が有限ならば，$\mathcal{C}^k(\Omega)$ は Montel 空間にならないことを証明せよ.

34.5. n 個の不定元に関する複素係数の形式的巾級数全体のなす Fréchet 空間を $\mathcal{Q}_n$ とする（位相は係数の単純収束の位相とする）. $\mathcal{Q}_n$ は Montel 空間であることを証明せよ.

34.6. 次に述べる定理 24.3 の拡張とその系を証明せよ.

定理 34.3. U を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω の相対コンパクト開部分集合とする．$\mathcal{B}$ を Ω 上の超関数のなす有界集合とする．いま $\mathcal{B}|U$ によって，$\mathcal{B}$ に属する超関数の U への制限全体からなる集合を表わすことにする．このとき，整数 $m\geqslant 0$ が存在して，$\mathcal{B}|U$ は $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ の双対 $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ に含まれ，そこで有界である.

定理 34.4. $\mathcal{B}$ を $\mathcal{E}'(\Omega)$ の有界集合とする．このとき．Ω のコンパクト部分集合 K と整数 $m\geqslant 0$ が存在して，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}^m(\Omega)$ の双対 $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ に含まれ，$\mathcal{B}$ に属する超関数の台はすべて K に含まれる.

上の二つの定理の陳述において，有界集合を収束列でおきかえ，有界を収束するでおきかえることができるか？

34.7. 次の定理 24.4 の拡張を証明せよ.

定理 34.5.　$\mathcal{B}$ を $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ における有界集合（或は収束列）とする $(0 \leqslant m < +\infty)$. 各 $T \in \mathcal{B}$ に対して，U_T を supp T の Ω における近傍とする.

このとき，任意の $T \in \mathcal{B}$ と任意の $p \in \mathbf{N}^n$, $|p| \leqslant m$ に対して，Ω 上の Radon 測度 $\mu_{p,T}$ が存在して次の性質をもつ.

(i)　各 $T \in \mathcal{B}$ に対して

$$T = \sum_{|p| \leqslant m} (\partial/\partial x)^p \mu_{p,T}$$

(ii)　各 T とすべての $p \in \mathbf{N}^n$, $|p| \leqslant m$ に対して，

$$\text{supp}\ \mu_{p,T} \subseteq U_T$$

(iii)　任意の $p \in \mathbf{N}^n$ に対し，T が $\mathcal{B}$ の中を動くとき，$\mu_{p,T}$ は Ω 上の Radon 測度の空間 $\mathcal{D}'^0(\Omega)$ の有界集合（或いは収束列）の中を動く.

34.8.　E を Fréchet 空間とする．E の双対にコンパクト収束の位相を入れた空間 E'_c は完備であることを示せ.

E の有界集合族 $\mathfrak{S}$ が $(\mathfrak{S}_{\text{I}})$, $(\mathfrak{S}_{\text{II}})$ をみたし，E のコンパクト集合をすべて含むとき，$E'_{\mathfrak{S}}$ が完備になることを補題 34.2 から導け.

35.

弱位相のさらに進んだ考察

この章では，E はつねに局所凸 Hausdorff 空間を表わし，E' はその双対を表わすものとする．

M を E の有限次元線形部分空間とし，M^0 をその直交する (19 章 240 頁)．$d=\dim M$ として，$e_1,\dots,e_d$ をベクトル空間 M の基底とする．Hahn–Banach の定理 (定理 18.1) の系 3 を適用すれば，M 上で恒等的には 0 でない M 上の連続線形形式 f_j が存在して $f_j(e_k)=0$ $j\neq k$ $(1\leqslant j,\, k\leqslant d)$ となる．M 上で恒等的には 0 でないことから，$f_j(e_j)\neq 0$ であるが，必要ならば定数倍することにより，$f_j(e_j)=1$ としてよい．再び Hahn–Banach の定理を適用することにより，f_j を全空間 E 上の連続線形形式 e_j' に拡張することができる．M' を $e_1',\dots,e_d'$ で張られる E' の線形部分空間とする．E' の各元 x' に，次の形の M' の元

$$p(x')=\sum_{j=1}^{d}\langle x',\ e_j\rangle\, e_j'$$

を対応させよう．E 上の線形形式 x' と $p(x')$ とは明らかに各 e_j において同じ値をとり，したがって M 上で一致する．すなわち，$x'-p(x')$ は M^0 に属する．逆に，もし $x'\in M^0$ ならば，明らかに $p(x')=0$ である．最後に次のことに注意しよう．$x'\in M'$ ならば

$$x'=\sum_{j=1}^{d}a_je_j',\qquad (a:\text{複素数})$$

となるが，このとき明らかに

$$\langle x'\, e_k\rangle=a_k,\qquad k=1,\dots,d$$

を得るから，$x'=p(x')$ である．以上のことから，p は E' から M' の上への線

形写像であり，その核は丁度 M^0 になる．また，p は M' 上では恒等写像に一致する．かくして，E'/M^0はベクトル空間として M' に同形であり，したがって，M にも同形となる（とくに，$\dim E'/M^0 = d$ を得る）．

今度は，L を E' 上の連続線形形式とする．E' には弱双対位相 σ を入れて考える．この位相の定義によって，E の有限部分集合 S と定数 $c>0$ が存在して，すべての $x' \in E'$ について

$$|L(x')| \leqslant C \sup_{x \in S} |\langle x',\ x\rangle| \tag{35.1}$$

が成り立つ．ここで前に述べた考察を S で張られる E の線形部分空間 M にあてはめてみよう（M が有限次元であることは明らか）．前と同様にして M' を構成し，

$$x_L = \sum_{j=1}^{d} L(e_j')e_j$$

とおくと，写像 p の上述の定義によって，すべての $x' \in E'$ について

$$\langle x',\ x_L\rangle = \sum_{j=1}^{d} L(e_j')\langle x',\ e_j\rangle = L(p(x'))$$

を得る．他方，$x'-p(x')$ は M に直交するから，$\langle x'-p(x'),\ x\rangle = 0$ がすべての $x \in S$ について成り立つから，(35.1) によって

$$L(x'-p(x')) = 0, \qquad \text{すなわち} \quad L(p(x')) = L(x')$$

かくして，結論として，すべての $x' \in E'$ について

$$\langle x', x_L\rangle = L(x')$$

を得る．ところで，E の各元 x は E' 上の線形形式を定義する．すなわち，x における "値"：$x' \mapsto \langle x', x\rangle$ である[1]．命題 19.6 によれば．x における値は E から E_σ' の双対への線形写像であった．また，命題 19.7 によれば，この写像は 1 対 1 であった．いま，それが上への写像であることを証明したから，次のように述べることができる．

1）通例，これを**求値写像** (evaluation mapping) という．

命題 35.1. 写像 $x\mapsto$ 'x における値' は E から E の弱双対の双対の上への線形同形写像である.

系. E に位相 $\sigma(E, E')$ を入れたものの双対は E' に一致する.

実際, 命題 35.1 によれば, (E の代りに E_σ' にこの命題を適用して) E_σ' は E_σ の弱双対に標準的に同形である. ゆえに, E と E' を入れ換えて命題 35.1 を適用すればよい.

$x\mapsto$ 'x における値' によって, 今後 E と E_σ' の双対を同一視する. ここで注目すべきことは, 集合 E' は E に始めにあたえられた位相に依存するが, E' 上の弱位相は E のみによって決まり, E の位相には依存しないことである. E を E_σ' の双対と見なすことによって, いまや E 上の弱位相を考えることができる. E 上および E' 上に弱位相を考えるが, これらを混同しないために, これらの位相をそれぞれ $\sigma(E, E')$ および $\sigma(E', E)$ で表わすことにする. 記号 $\sigma(F, G)$ は左の方に書れた空間, すなわち F 上の位相を表わす.

E に位相 $\sigma(E, E')$ を入れ, E' に位相 $\sigma(E', E)$ を入れるならば, 事情は E と E' について完全に対称となる. 今後, この対称性を利用する. まず, x' の x における値 (或いは x の x' における値) を表わすのに, $\langle x', x\rangle$ 或いは $\langle x, x'\rangle$ と書いたりする.

命題 18.3 と命題 35.1 を組合せて. 次の結果を得る.

命題 35.2. A を局所凸 Hausdorff 空間 E の凸部分集合とする. E のもとの位相に関する A の閉包と, 弱位相 $\sigma(E, E')$ に関する A の閉包とは一致する.

この命題によって, これから述べる諸結果の陳述が相当に簡単化される. しかしながら, 次のような間違いをしないように読者は注意しなければならない. たとえば. E' を E の双対とし, A' を E' の凸部分集合としたとき, E' の弱位相に関する A' の閉包と E' 上の強双対位相に関する A' の閉包が一致する

——というのは正しくない（E_b' 双対が E と同一視できるときには一致するが，そうでなければ，一般には正しくないのである）.

A' を E' の部分集合とする．A'^0 によって A' の極集合を表わす．これは，E を E' の双対と見なしたときの，E の部分集合である（定義 19.1 参照）．集合 A' 自身が E の或る集合 A の極になっているような場合には，$A'^0=(A^0)^0$ となる．そこで，次の定義を導入する．

定義 35.1. A を E の部分集合とし，その極を A^0 とする．A^0 の極（E を E' の双対と同一視したときの）を A の**陪極** (bipolar) と呼び，A^{00} によって示す[1].

次の命題は，あたえられた集合の陪極を簡単に特徴づけるものである．

命題 35.3. A を E の部分集合とする．A の陪極 A^{00} は A の閉凸平衡包に等しい．

証　明　A の凸平衡包の，もとの位相に関する，或は（同じことになるが）位相 $\sigma(E, E')$ に関する，閉包を $\widehat{A}$ とする（すなわち，$\widehat{A}$ は A を含む最小の閉凸平衡集合である）．ところで，A^{00} は明らかに平衡的かつ凸であり（上巻 239 頁），また弱閉であるから（直ちにわかるように，極集合はつねに弱閉である），$\widehat{A}\subseteq A^{00}$ である．われわれは，この逆向きの包含関係を証明せねばならない．すなわち，$x^0\notin\widehat{A}$ ならば $x^0\notin A^{00}$ となることを証明しなければならない．

［訳者挿入］"$x^0\in\widehat{A}$ ならば $x^0\notin A^{00}$" を示すことは，本質的には Hahn-Banach の定理による分離問題（上巻 12 章 (3)）であるが，係数体が複素数体 **C** の場合を扱うために，少々説明を補足しておこう．

E が **C** 上の局所凸 TVS のときには，スカラー乗法を実数体 **R** に制限することによって，**R** 上の局所凸 TVS を得る．いま h を E 上の連続な **C**-線形形式とするとき，

1）bipolar は双極とも訳されている．

(35.2.1) $$h(x) = f(x) + ig(x)$$

とおいて，実部と虚部の和に分解すれば，f および g は E 上の連続な $\mathbf{R}$-線形形式となる．このとき，$h(ix) = ih(x)$，$(i = \sqrt{-1})$ の両辺を比較することにより，$g(x) = -f(ix)$ を得るから．

(35.2.2) $$h(x) = f(x) - if(ix)$$

が成り立つ．逆に，f を E 上の任意の連続 $\mathbf{R}$-線形形式とするとき，(35.2.2) によって h を定義すれば，h が連続 $\mathbf{C}$-線形形式となることが容易に検証できる．このようにして，h と f は標準的に1対1に対応する．

さて，命題35.3の証明は次の命題に基づく．

命題 35.3′. E を $\mathbf{C}$ 上の局所凸 TVS，A を E の閉凸平衡的集合，x^0 を A に属さない E の点とする．

このとき，E' の元 x' が存在して，すべての $x \in A$ について $|\langle x', x\rangle| \leqslant 1$ かつ $|\langle x', x^0\rangle| > 1$ となる．

証 明 係数体を $\mathbf{R}$ に制限すれば，命題18.2(上巻232頁)によって，E 上の連続 $\mathbf{R}$-線形形式 f が存在して，すべての $x \in A$ について $f(x) \leqslant 1$ かつ $f(x^0) > 1$ となる．A は平衡的だから，とくに対称であり，x の代りに $-x$ とおくことによって，すべての $x \in A$ について

(35.2.3) $$|f(x)| \leqslant 1$$

となる．そこで，(35.2.2) によって f から得られる連続 $\mathbf{C}$-線形形式 h について考えると，$|h(x^0)| > 1$ は明らか(なぜなら $|h(x^0)| \geqslant |f(x^0)|$)．他方，すべての $x \in A$ について

(35.2.4) $$|h(x)| \leqslant 1$$

となることを示そう．

$x \in A$ を任意に固定したとき，複素数 $h(x)$ の偏角を θ とすれば[1]，$h(x) = |h(x)|e^{i\theta}$ と書ける．したがって，$|h(x)| = e^{-i\theta}h(x)$ である．h の $\mathbf{C}$-線形性と (35.

1) $h(x)=0$ なら θ は定まらないが，そのとき (35.2.4) は明らか．

2.1) を用いれば

$$|h(x)| = h(e^{-i\theta}x) = f(e^{-i\theta}x) + ig(e^{-i\theta}x)$$

となるが，左端は実数だから $g(e^{-i\theta}x) = 0$. ゆえに

$$|h(x)| = f(e^{-i\theta}x) \leqslant |f(e^{-i\theta}x)| \tag{35.2.5}$$

を得る．ところで，A は平衡的なことから，$x \in A$ ならば $e^{-i\theta}x \in A$. ゆえに，(35.2.3) と (35.2.5) から，求める (35.2.4) を得る． この h が定める E' の元を x' と書けば，命題の陳述を得る (証終).

さて，本文の命題 35.3 の証明にもどろう．$\widehat{A}$ は閉凸平衡集合だから，上記命題 35.3′ の A に $\widehat{A}$ をあてはめるならば，$x' \in E'$ が存在して，$|\langle x', x^0\rangle| > 1$ かつすべての $x \in \widehat{A}$ について $|\langle x', x\rangle| \leqslant 1$となる．とくに $x \in A$ について成り立つから (なぜなら $A \subseteq \widehat{A}$)，これは $x' \in A^0$ を示している．ゆえに，$|\langle x', x^0\rangle| > 1$ は $x^0 \notin A^{00}$ を示している．かくして命題 35.3 の証明は終る (挿入終).

系 1. $(A^{00})^0 = A^0$.

実際，$(A^{00})^0$ は A^0 の ($\sigma(E', E)$ 関する) 閉凸平衡包であるが，A^0 は弱閉凸平衡集合だから一致する．

系 2. M を E の線形部分空間とすれば，M の陪極 M^{00} は M の閉包に等しい．

M が E の線形部分空間であれば，M^0 は E' の線形部分空間となるから，したがって，M^{00} は E の線形部分空間である．

さて，F をもう一つの局所凸 Hausdorff TVS として，u を E から F への連続線形写像とする．通例のように，

$$\operatorname{Im} u = \{y \in F\,;\ x \in E \text{ が存在して，} u(x) = y\};$$
$$\operatorname{Ker} {}^t u = \{y' \in F'\,;\ {}^t u(y') = 0\}$$

とおく，このとき

$$\text{Ker}\,{}^t u = (\text{Im}\, u)^0 \tag{35.3}$$

が成り立つことを思い出そう (命題23.2). ここでもちろん, E および F をそれぞれ E_σ' および F_σ' の双対と見なすことによって, 写像 ${}^t u: F' \to E'$ の転置を考えることもできる. ところで, 直ぐにわかるように, ${}^{tt}u = u$ となる. したがって, (35.3) の u ところに ${}^t u$ をあてはめることにより

$$\text{Ker}\, u = (\text{Im}\,{}^t u)^0$$

を得る. この両辺の極をとり, 命題35.3の系2を用いることによって, 次の命題を得る.

命題 35.4. u を E から F への連続線形写像とするとき, $\text{Ker}\, u$ の直交は ${}^t u$ の像の弱閉包に一致する.

u が或る空間への部分空間から標準的単射 [埋めこみ], または或る空間からその商空間の上への標準的準同形であるときに, 等式 (35.3) および命題35.4を応用してみよう. これらのことを用いて, 線形部分空間の双対や商空間の双対を考察しようというのである.

先ず, N を E の線形部分空間とする. N から E への標準的単射を転置すれば E' から N' の上への線形写像を得る (上への写像になることは, Hahn-Banach の定理による). この転置写像の核は, 等式 (35.3) によって, N^0 に等しい. かくして, E'/N^0 から N' の上への標準的線形写像を得る.

次に, φ を E から $E/\bar{N}$ の上への標準的準同形写像としよう. E には, もとの位相 (または弱位相) を入れ, $E/\bar{N}$ には, E に入れた位相の ($\bar{N}$ を法とする) 商位相を入れて考える. 転置写像 ${}^t\varphi$ は, $E/\bar{N}$ の双対から E' への一つの単射である. 命題35.4によれば, ${}^t\varphi$ の像の弱閉包は $\text{Ker}\,\varphi$ すなわち $\bar{N}$ の直交に一致する. 換言すれば, $\text{Im}\,{}^t\varphi$ の弱閉包は N^0 に等しい. ゆえに $\text{Im}\,{}^t\varphi \subseteq N^0$. ところで, 逆に, $x' \in N^0$ としてみよう. 連続線形形式 x' は $\bar{N}$ 上で0になり[1], したがって, $\bar{N}$ を法とする各同値類上で一定となる. したがって, x' は $E/\bar{N}$

1) N 上で0になり, 連続性から $\bar{N}$ 上でも0になる.

上の連続線形形式 $\tilde{x}'$ を定義する．このとき，${}^t\varphi(\tilde{x}')=x'$ であることはただちにわかる．これで $\mathrm{Im}\,{}^t\varphi=N^0$ となることが証明された．かくして，$E/\bar{N}$ (位相は，E の位相の $\bar{N}$ を法とする商位相) の双対から N^0 の上への標準的同形写像が得られた．

これらをまとめると，

命題 35.5. E を局所凸 Hausdorff 空間とし，N をその線形部分空間とする．このとき，次のことが成り立つ．

(a) 自然な単射 $N\to E$ の転置写像は，E'/N^0 から N の双対 N' の上への 1 対 1 の線形写像を誘導する[1]．

(b) 標準的準同形写像 $E\to E/\bar{N}$ の転置は，$E/\bar{N}$ の双対から N^0 の上への 1 対 1 の線形写像となる．

ここで注意すべきことは，(a) および (b) における同形写像が代数的なものだということである．すなわち，これらの同形は，そこに現れる空間の位相を考慮に入れていない．ところで，E'/N^0 上では明らかに二つの位相を考えることができる：(1) E' 上の弱位相 $\sigma(E',E)$ の N^0 を法とする商位相，これを $\sigma(E',E)/N^0$ で表わす；(2) E'/N^0 を N の双対と見なしたときの弱双対位相 $\sigma(E'/N^0,N)$.

命題 35.6. E, N は命題 35.5 の通りとする．次の二つの条件は同値である．

(35.4)　N は閉部分空間である．

(35.5)　E'/N^0 上の二つの位相 $\sigma(E',E)/N^0$ と $\sigma(E'/N^0,N)$ は一致する．

証　明　まず，幾つかの準備的な考察から始めよう．$\mathscr{W}(x_1,\ldots,x_r;\varepsilon)$ $(x_1,\ldots,x_r$: E の任意の有限部分集合；ε : 任意の数 $>0)$ によって，$j=1,2,\ldots,r$ の各 j について $|\langle x',x_j\rangle|\leq\varepsilon$ となるような $x'\in E'$ の集合を表わそう．E' から E'/N^0 の上への標準的準同形写像を φ' で表わす．位相 $\sigma(E',E)/N^0$ に関する

1) 詳しく書けば，$i:N\to E$ を自然な単射とするとき，標準的準同型 $\phi:E'\to E'/N^0$ と，同形 $\theta:E'/N^0\to N'$ を用いて ${}^ti=\theta\circ\phi$ となる．

E'/N^0 の 0 の近傍基底として，$\mathscr{W}(x_1,\dots, x_r;\varepsilon)$ の φ' による像から成るものが存在する．

さて，$y_1,\dots, y_s$ を N の有限部分集合とする．E'/N^0 と N の双対性[1] において，N^0 を法とする同値類 $\varphi'(x')$ の代表元を何にするかということに関係なく，$\langle\varphi'(x'), y_j\rangle=\langle x', y_j\rangle$ が成り立つ．したがって，位相 $\sigma(E'/N^0, N)$ に関する E'/N^0 の 0 の近傍基底を得るには，$\varepsilon>0$ と N の有限部分集合 $\{y_1,\dots, y_s\}$ を任意に動かしたときに得られる $\mathscr{W}(y_1,\dots, y_s;\varepsilon)$ の φ' による像をとればよい．とくに，このことから，位相 $\sigma(E', E)/N^0$ はつねに $\sigma(E'/N^0, N)$ よりも細かいことがわかる．

さて，N が閉部分空間のとき，E の任意の有限部分集合 $\{x_1,\dots x_r\}$ に対して，N の有限部分集合 $\{y_1,\dots, y_r\}$ が存在して（元の個数は同じ），すべての $\varepsilon>0$ について

$$(35.6)\qquad \varphi'(W(y_1,\dots, y_r;\varepsilon))\subseteq\varphi'(W(x_1,\dots, x_r;\varepsilon))$$

が成り立つことを証明しよう．そうすれば，$\sigma(E'/N^0, N)$ は $\sigma(E', E)/N^0$ より細かいことになり，したがって一致する．

上の (35.6) を示すために，$y_j(j=1,\dots, r)$ を構成しよう．N と $x_1,\dots, x_r$ によって張られる E の線形部分空間を L とする．N は L において有限余次元だから，N は L において（有限次元）補空間 P をもつ．P の基底を $z_1,\dots, z_d$ とする．線形形式

$$(35.7)\qquad x'\mapsto\langle x', z_j\rangle,\qquad j=1,\dots, d$$

の N^0 への制限は一次独立である．実際，一次結合 $\sum_{j=1}^{d}\lambda_j z_j$ が N^0 上で 0 になるとして見よう．すなわち，N^{00} に属するとしてみる．N は閉だから，$N=N^{00}$ であり，$\sum\lambda_j z_j\in N$ ならばその係数 λ_j はすべて 0 に等しくなければならない．このことは，z_j のえらび方から明らかである（$N=N^{00}$ のところで，N が閉であることを用いた；命題 35.3 参照）．線形形式 (35.7) の N^0 への制限が一次独立であるから，各 $j=1,\dots, d$ に対して，$z_j'\in N^0$ を $\langle z_j', z_j\rangle=1$, $\langle z_j',$

1) 標準的双線形形式を考えること．

$z_k\rangle = 0$ ($j \neq k$ のとき) となるようにえらぶことができる．さて，x' を E の任意の元とする．各 $j = 1, \dots, d$ に対して，$\langle x', z_j\rangle$ は複素数であるから，

$$p(x') = -\sum_{j=1}^{d} \langle x', z_j\rangle z_j'$$

とおけば，$p(x')$ は N^0 に属し，

$$\langle x'+p(x'), z_j\rangle = 0, \qquad j = 1, \dots, d$$

が成り立つ．$x_1, \dots, x_r$ にもどって考えれば，各 $l = 1, \dots, r$ について

$$x_l = y_l + w_l$$

と分解できる．ただし $y_l \in N$ であり $w_l \in P$，すなわち w_l は z_j の一次結合である．このとき，各 $x' \in E'$ に対して，

$$\langle x', y_l\rangle = \langle x'+p(x'), y_l\rangle = \langle x'+p(x'), x_l\rangle$$

が成り立つ． この式の意味するところは：もし $x' \in W(y_1, \dots, y_r\,;\,\varepsilon)$ ならば，N^0 を法として x' に合同な E' の元が存在して[1]，その元が $W(x_1, \dots, x_r\,;\,\varepsilon)$ に属するということである．このことから，(35.6) はただちに従う．

今度は，もし $\sigma(E'/N^0, N) = \sigma(E', E)/N^0$ ならば，Nは閉でなければならないことを証明しよう．ところで，この証明の前半から，

$$\sigma(E', E)/N^0 = \sigma(E'/N^0, \bar{N}) \tag{35.8}$$

の成り立つことがわかっている (実際，N^0 は $\bar{N}$ の直交でもあるから)．ここで命題 35.1 を二度用いよう．(35.5) から，E/N^0 (位相は $\sigma(E', E)/N^0$) の双対は N に標準的に同形である．ところで，(35.8) はこの双対が $\bar{N}$ にも標準的に同形であることを意味する．かくして，$N = \bar{N}$ を得る[2]．(証終)

命題 35.7. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とし，u を E から F への連続線形写像とする．このとき，次の二つの 条件は同値である．

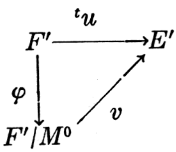
(a)　$u(E)$ は F において閉，

1)　それは，すなわち $x'+p(x')$.

1)　$N = \bar{N}$ を得るには，その同形が "標準的" というところが大切である．読者がこれを確かめることを奨める．

(b) ${}^t u$ は F_σ' から ${}^t u(F') \subseteq E_\sigma'$ の上への (TVS 構造に関する) 準同形写像である.

準同形の概念については 17 章上巻 204 頁を見よ. $M = u(E)$, u の像, とおくならば, (35.1) によって $\mathrm{Ker}\,{}^t u = M^0$ である. $\varphi : F' \to F'/M^0$ を標準写像とすると, 線形写像 $v : F'/M^0 \to E'$ が存在して, 次の図式が可換となる:



命題 35.7 の条件 (b) の述べるところは, F'/M^0 に商位相 $\sigma(F', F)/M^0$ を入れ, ${}^t u(F')$ には $\sigma(E', E)$ による誘導位相を入れたときに, v が ${}^t u(F')$ の上への同形写像になることである.

命題 35.7 の証明 $x \in E$ と $y' \in F'$ に対して

$$\langle v(\varphi(y')),\, x\rangle = \langle y',\, u(x)\rangle$$

が成り立つが, この右辺は $\langle \varphi(y),\, u(x)\rangle$ に等しい. ただし, ここでの括弧は, F'/M^0 と M の間の双対性の括弧である (命題 35.5). したがって, $\sigma(F'/M^0, M)$ に関して $\varphi(y') \to 0$ となるには, $\sigma(E', E)$ に関して $v(\varphi(y')) \to 0$ となることが必要十分であることがわかる. これは, v が, F'/M^0 に位相 $\sigma(F'/M^0, M)$ を入れたものから ${}^t u(E) \subseteq E'$ に位相 $\sigma(E', E)$ を入れたものの上への同形写像であることを示している. ところで, $\sigma(F'/M^0, M) = \sigma(F', F)/M^0$ となるのは, M が閉であるときそのときに限るから, これで証明は終る (命題 35.6).

TVS 上の弱位相と強位相については, 線形写像との関連して, 次の結果が成り立つ.

命題 36.8. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とし, u を E から F への連続線形写像とする. このとき, u は E に弱位相 $\sigma(E, E')$ を入れたものから

F に $\sigma(F, F')$ を入れたものへの連続写像となる．

証 明 $u: E \to F$ が連続とすれば，u の転置 ${}^t u$ は，E の弱双対 E_σ' から F の弱双対 F_σ' への連続線形写像となる（命題19.5の系）．これを繰り返せば，${}^t u$ の転置すなわち u は，E_σ' の弱双対から F_σ' の弱相対への連続線形写像である．したがって，命題35.1を適用すれば，求める結果を得る．

後に（補題37.6），E が距離付け可能な空間のときには，命題35.8の逆が成り立つことを見るであろう．すなわち，そのときには，$\sigma(E, E')$ と $\sigma(F, F')$ に関する連続性から，もとの位相に関する連続性が出るのである．

演 習 問 題

35.1. 局所凸 Hausdorff 空間 E の部分集合 A について，その極集合 A^0 が $\{0\}$ に等くなるための必要十分条件をあたえよ．

35.2. E を局所凸 Hausdorff 空間とし，$\hat{E}$ をその完備化とする．もし $E \neq \hat{E}$ ならば，$\sigma(E', \hat{E})$ は $\sigma(E', E)$ よりも真に細かいことを証明せよ．

35.3. E を局所凸 Hausdorff TVS とし，E' をその双対とする．このとき，E の部分空間 M の次元が $n < +\infty$ とすれば，その直交 $M^0 \subseteq E'$ の余次元は n に等しいことを証明せよ．また，M の余次元を n としたときには，M^0 の次元つねに n となるであろうか？

35.4. E と E' は演習問題35.3のとおりとする．いま，E に弱位相 $\sigma(E, E')$ を入れたとき，E が二つの部分空間 M と N の位相的直和になると仮定する．すなわち，積 TVS $M \times N$ から E への写像 $(x, y) \mapsto x+y$ が上への同形写像であるとする．このとき，E' に $\sigma(E', E)$ を入れたものは，M^0 と N^0 の位相的直和になることを証明せよ．

36.

双対性に整合する諸位相, Mackey の定理, 回帰性

この章では, 一つの局所凸 Hausdorff 空間 E を考察するが, その際に, E に始めから与えられている位相と, これから E 上に定義しようとする諸位相とを区別する必要がある. そこで, 始めからあたえられている位相のことを**始位相** (initial topology)[1] とよぶことにしよう. E の双対は, いつものとおり E' で表わす. 次の疑問が生ずる. E 上のどのような局所凸位相に対して, その位相を E に入れたときの双対が E' と一致するか?

すでに 35 章において, そのような位相に出合っている. すなわち, E 上の弱位相 $\sigma(E, E')$ である. E 上の始位相はもちろんその一つである. ところで, そのようなすべての位相の特徴づけをあたえることができる. そのために, E を E_σ' の双対と同一視することにしよう (命題 35.1). そうすれば, E に $\mathfrak{S}$- 位相を入れることができる. ここで, $\mathfrak{S}$ は E_σ' の有界集合族 (すなわち, E' の弱有界集合の族) であって, 条件 ($\mathfrak{S}_\mathrm{I}$), ($\mathfrak{S}_\mathrm{II}$) (19 章 240 頁, 或いは 32 章 414 頁) を満たすものである.

定理 36.1. $\mathcal{T}$ を E 上の一つの局所凸 Hausdorff 位相とする. このとき, 次の二性質は同値である.

(a) $\mathcal{T}$ は E 上の一つの $\mathfrak{S}$- 位相と一致する. ここで $\mathfrak{S}$ は弱コンパクトな平衡的凸集合からなる E' の一つの被覆である.

(b) E に位相 $\mathcal{T}$ を入れたものの双対は E' に一致する.

---

1) これを**元位相** (original topology) ということもある.

証　明　(a) から (b) の出ること．E 上の $\mathfrak{S}$- 位相は，$\mathfrak{S}$ に属する集合の部分集合をすべて $\mathfrak{S}$ に付加しても変らない．$\mathfrak{S}$ は E' の被覆だから，E' の有限部分集合はすべて $\mathfrak{S}$ に属すると考えてよいから，$\mathfrak{S}$- 位相は明らかに弱位相 $\sigma(E, E')$ よりも細かい．このことからただちに出る結論として，E_σ の双対 E' は，E に $\mathfrak{S}$- 位相を入れたときの双対に含まれるということがわかる．この後者の双対[1]を E_1' で表わすことにする．よって，証明すべきことは［逆の包含関係］$E'_1 \subseteq E'$ である．ところで，E' 上では，弱位相 $\sigma(E', E)$ は $\sigma(E'_1, E)$ の誘導位相に一致することは明らかである．ゆえに $\sigma(E', E)$ に関してコンパクトな集合 $K \in \mathfrak{S}$ はすべて $\sigma(E_1', E)$ に関してもコンパクトとなり，したがって $\sigma(E_1', E)$ に関して閉集合である．これらの集合は凸かつ平衡的であるから，命題 35.3 によって，これらの各集合はその陪極に一致する．そこで，$f \in E_1$ を任意にとれば，E_1' の定義によって，$K \in \mathfrak{S}$ が存在して

$$\text{すべての } x \in K^0 \text{ について } |f(x)| \leqslant 1,$$

が成り立つ．これは $f \in K^{00} \subseteq E'$ を意味する．かくして，$f \in E'$ であり，$E_1' = E'$ が成り立つ．

(b) から (a) の出ること．U を位相 $\mathcal{T}$ に関する E の 0 の近傍としよう．U の極 U^0 は E' の弱コンパクト部分集合である（命題 32.7 と 32.8）．U が 0 の近傍フィルター（$\mathcal{T}$ に関する）を動くときの U^0 の全体からなる集合族を $\mathfrak{S}$ としよう．$\mathfrak{S}$ の各元は凸，平衡的，弱コンパクトである．さらに，それらの集合は E' の被覆を構成している．実際，$x' \in E'$ とすれば，E の 0 の適当な近傍 U が存在して，すべての $x \in U$ について $|\langle x', x\rangle| \leqslant 1$ となるが，これは $x' \in U^0$ を示す．残るところは，$\mathcal{T}$ がこの $\mathfrak{S}$- 位相と一致することの検証である．ところで $\mathcal{T}$ に関する 0 の基本近傍系として，0 の平衡的凸閉近傍からなるものの存在に着目しよう．V をそのような近傍とすれば，V はその陪極 V^{00} に等しい（命題 35.3）．したがって，V は $V^0 \in \mathfrak{S}$ の極に等しい．他方，$\mathfrak{S}$- 位相に関する 0 の基本近傍系として，$\mathfrak{S}$ に属する集合の極からなるものが存在する．すなわち，

1)　記号では $(E_\mathfrak{S})'$ とも書くべきもの

(位相 $\mathcal{T}$ に関する) E の 0 の近傍 U の陪極 U^{00} からなるものである．$U \subseteq U^{00}$ だから，これらの陪極は $\mathcal{T}$ に関する 0 の近傍となる．かくして，この $\mathfrak{S}$- 位相は $\mathcal{T}$ よりも細かいこと，および $\mathcal{T}$ より粗らいことが証明された．(証終)．

E 上の局所凸 Hausdorff 位相 $\mathcal{T}$ は，E に $\mathcal{T}$ を入れたものの双対が E' に一致するとき，E と E' の間の双対性に**整合する** (compatible) という．定理 36.1 は．そのような位相を特徴づけるものである．また，この定理から，それらの位相のなす半順序集合は，最小元として弱位相 $\sigma(E, E')$(E' の有限部分集合[1] の族は E' の弱コンパクト部分集合からなる族 $\mathfrak{S}$ としては最小のもの) をもち，最大元としては E' の任意の弱コンパクト凸平衡集合上の一様収束の位相をもっていることがわかる．この後者の位相は，E 上の **Mackey 位相** (Mackey topology) とよばれ，$\tau(E, E')$ によって表わされる．E 上の始位相は E と E' の間の双対性に整合するから，それは $\tau(E, E')$ よりも粗い．このことは，定理 36.1 の証明の後段からも明らかである．このことと関連して，次のことが成り立つ．

命題 36.1. 局所凸 Hausdorff 空間 E の位相は，E' の各同等連続部分集合上の一様収束の位相と一致する．

実際，定理 36.1 の証明からわかるように，E と E' の間の双対性に整合する位相 $\mathcal{T}$ は，$\mathcal{T}$ に関する 0 の各近傍 U の極 U^0 からなる $\mathfrak{S}$ に対する $\mathfrak{S}$- 位相に一致する．したがって，命題 32.7 を適用すればよい．

すでに見たように (命題 35.2)，E の凸部分集合の閉包は，始位相に関するものも弱位相 $\sigma(E, E')$ に関するものも同じになる．もっと一般に，次のことが成り立つ．

命題 36.2. E の凸部分集合 A の閉包は，E と E' の間の双対性に整合するすべての局所凸 Hausdorff 位相に関して，同じになる．

証　明　E 上の連続な **R**- 線形形式は，E 上の連続な **C**- 線形形式すなわち

1) 必要に応じては，その凸平衡包をとって考える．

E' の元と 1 対 1 に対応する (命題 35.2 の証明参照). したがって，E と E' の間の双対性に整合するすべての位相に対して，連続 **R**- 線形形式全体は同じである. ゆえに，閉超平面および閉半空間もまた，これらの位相に対して，同じになる. かくして，命題 18.3 を適用すれば，求める結果を得る.

もう少し深い結果としては，Mackey の定理がある. この定理の述べるところは，E と E' の間の双対性に整合するすべての位相に対して，有界集合が同じになるということである. このことを証明するために，空間の一つの構成法を述べよう. これは後に，異なった事情のもとでも，応用される.

ノルム空間 E_B

E を一つの局所凸 Hausdorff TVS とし，B をその有界凸平衡的部分集合とする. B によって張られる E の部分空間を E_B で表わす. B は E_B の吸収的部分集合になることに注意しよう (E の部分集合としては，一般的には，吸収的ではない). $x \in E_B$ に対して

$$p_B(x) = \inf_{x \in \lambda B} |\lambda|$$

とおく. B は凸，平衡的かつ吸収的だから，p_B は E_B 上の一つのセミノルムとなる. 実際には，これは一つのノルムである. なぜなら，U を E における 0 の任意の近傍とするとき，$\rho > 0$ が存在して $B \subseteq \rho U$ となる. すなわち $\rho^{-1}B \subseteq U$ となるが，これは，セミノルム p_B によって E_B 上に定義される位相，すなわち B のスカラー倍 εB, $\varepsilon > 0$ を 0 の近傍基底とすることによって定義される位相が，E から誘導される位相よりも細かいことを示している. E の位相は Hausdorff だったから，p_B によって定義される位相も Hausdorff となる. かくして，ノルム空間 E_B と連続な自然な単射 $E_B \to E$ が得られた.

補題 36.1. E の有界凸平衡的部分集合 B が完備であるとすれば，ノルム空間 E_B は Banach空間となる.

証　明　$\{x_k\}(k=1,2,\ldots)$ を E_B における Cauchy 列としよう．これは E_B の有界集合であるから (命題 14.1 の系 3)，B の或るスカラー倍 ρB に含まれる．ρB は E からの誘導位相に関して完備だから，列 $\{x_k\}$ は E からの誘導位相に関して 1 点 $x\in\rho B$ に収束する．スカラー倍 ρB は誘導位相に関して閉集合であることに注目しよう．したがって，補題 34.2 が適用できる状況にちょうど当てはまる．このことから，補題 36.1 はただちに従う．

系　K を E のコンパクトな凸平衡的集合とすれば，E_K は Banach 空間となる．

この系の状況のもとでは，自然単射 $E_K\to B$ は E_K の閉単位球をコンパクト集合に写すことに注意しておこう．補題 36.1 から，次の有用な結果が得られる．

補題 36.2. T を一つの局所凸 Hausdorff TVS E の樽とし，B を E の完備な有界凸平衡的部分集合とする．このとき，$\rho>0$ が存在して

$$B\subseteq\rho T$$

となる．

補題 36.2 が興味のあるのは，E 自体が樽型空間にならないときである．E が樽型空間のときには，T は E の 0 の近傍となり，任意の有界集合を吸収するからである．

証　明　$T\cap E_B$ は明らかに E_B において一つの樽となる．実際，それは凸平衡的かつ吸収的であり，E のからの誘導位相は E_B の位相よりも粗いから，T が E で閉なことより，$T\cap E_B$ はノルム空間 E_B でも閉となるからである．補題 36.1 により，E_B は Banach 空間であり，したがって樽型空間である．ゆえに，$T\cap E_B$ はその閉単位球 (それは B) の或るスカラー倍を含む．(証終)．

いまや，Mackey の定理の証明は容易である．

定理 36.2. E の有界集合は，E と E' の間の双対性に整合する局所凸 Hau-

sdorff 位相すべてに対して，同じである．

証　明　或る位相に関して有界な集合は，それよりも粗い位相に関しても有界になるから，E の弱有界な集合が Mackey 位相 $\tau(E, E')$ に関して有界になることを証明すれば十分である．

K を E' の凸平衡的弱コンパクトな集合とし，B を E の弱有界集合とする．複素平面において，原点を中心とし半径 $\varepsilon>0$ の閉円板を D_ε で表わすことにしよう．$x\in E$ に対して，$x^{-1}(D_\varepsilon)$ を $\langle x, x'\rangle \in D_\varepsilon$ となる元 $x'\in E'$ のなす集合とする．このとき．E' の部分集合

$$T=\bigcap_{x\in B} x^{-1}(D_\varepsilon)$$

は樽である[1]．実際，この集合は E_σ' の閉凸平衡的部分集合の共通部分だから，閉凸平衡的集合である．それは吸収的である．実際，x' を E' の任意の元とすれば，B は弱有界だから，数 $\tau>0$ が存在して，$\tau B\subseteq W(\{x'\}; \varepsilon)=\{x\in E; |\langle x, x'\rangle|\leqslant\varepsilon\}$ となる．{これはちようど $\tau x'\in T$ を意味している．したがって，補題 36.2 により，数 $\rho>0$ が存在して，$K\subseteq \rho T$ となる．これは

$$B\subseteq \rho W(K; \varepsilon),\ W(K; \varepsilon)=\{x\in E; \sup_{x'\in K}|\langle x, x'\rangle|\leqslant\varepsilon\}$$

を意味している．(証終)．

いまや，局所凸 Hausdorff TVS E があたえられたとき，E と E' の間の双対性に整合する E 上の諸位相については，そのうちの一つの指定することなしに，有界集合について議論することができることになる．とくに，有界集合と弱有界集合とは，区別する必要がなくなった．

命題 36.3.　局所凸 Hausdorff 空間 E が距離付け可能かまたは樽型空間であれば，E の始位相は Mackey 位相 $\tau(E, E')$ と一致する．

証　明　1. E を距離付け可能と仮定しよう．U を Mackey 位相に関する 0 の（平衡的な）近傍とする．$\{U_n\}$ を始位相に関する 0 の近傍基底としよう．も

1)　簡単に言うならば，E の弱有界集合の極は E_σ' の樽である．B が弱有界ならば $(1/\varepsilon)B$ も弱有界であり，この極が T に等しい．実際には $\varepsilon=1$ として議論してよい．

し U が始位相に関して 0 の近傍でないとするならば，各 $n=1,2,\ldots$ にについて $x\in(1/n)U_n$ が存在して，$x_n\notin U$ となる．このとき，点列 nx_n は 0 に収束し，したがって E の有界集合になることに注意しよう．定理 36.2 によれば，数 $\rho>0$ が存在して，すべての n について $nx_n\in\rho U$ となる．これは，各 n について $x_n\notin U$ なる事実に矛盾する．

2. E を樽型空間と仮定する．このとき，E' の任意の弱コンパクト部分集合は同等連続集合である (定理 33.2)．したがって，この場合は，命題 36.3 は命題 36.1 より出る．

次に，局所凸 Hausdorff 空間の回帰性の考察に進もう．

定義 36.1. E の強双対 E_b' の双対を E の**陪双対** (bidual) とよび，E'' によって表わす[1]．

強双対位相は弱双対位相よりも細かいから，E_σ' は E'' の線形部分空間と見なすことができる．命題 35.1 によって，写像 $x\mapsto$ 'x における値' は，E から E'' への 1 対 1 の線形写像であることがわかる．

定義 36.2. 写像 $x\mapsto$ 'x における値' が E を E'' の上へ写すとき，空間 E は**半回帰的** (semi-reflexive) であるという．この写像が，E からその強双対 E_b' の強双対 E_b'' の上への (TVS 構造に関する) 同形写像となるとき，E は**回帰的** (reflexive) であると言う．

換言すれば，E が回帰的であるとは，それが半回帰的であって，その始位相が E を E_b' の双対と見なしたときの強双対位相に一致することを言うのである．

命題 36.4. 半回帰的空間の強双対は樽型空間である．

証 明 E を半回帰的空間とし，E_b' をその強双対とする．T' を E_b' におけ

1) 双対のことを**共役** (conjugate) とよぶことあるが，そのときには陪双対のことを**第 2 共役** (second dual) とよぶことが多い．

る樽としよう．E' 上の強双対位相も弱双対位相も共に E' と E の間の双対性に整合するから，命題 36.2 により，T' は弱閉となる．したがって $T' = T'^{00}$ である．ゆえに，T' が E_b' における 0 の近傍であることを証明するには，T'^0 が E の有界集合になることを示せば十分である（なぜなら，T' は T'^0 の極集合だから）．ところで，Mackey の定理（定理 36.2）によれば，E において T'^0 が $\sigma(E, E')$ に関して有界なことを示せばよいことになる．

T' は吸収的だから，任意の $x' \in E$ に対して，数 $c > 0$ が存在して $cx' \in T'$ となる．これからただちに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$c\varepsilon T'^0 \subseteq W(\{x'\};\varepsilon) = \{x \in E\,;\, |\langle x', x\rangle| \leqslant \varepsilon\}$$

となることが出る．$x' \in E'$ と $\varepsilon > 0$ が動くとき，集合 $W(\{x'\};\varepsilon)$ の有限個の共通部分の全体が $\sigma(E, E')$ に関する 0 の近傍基底をなすから，これから求める結果が出る．

定理 36.3. E を局所凸 Hausdorff 空間とする．次の二つの性質は同値である．

(a)　E は半回帰的である．

(b)　$\sigma(E, E')$ に関して，E のすべての閉有界集合はコンパクトである．

証　明　(a) から (b) が出ること．E は半回帰的だから，E はその強双対 E_b' という樽型空間の双対となる．ここで命題 36.4 を用いた．あとは，定理 33.2 を適用すればよい．

(b) から (a) が出ること，E' 上の強双対位相が，E' と E の間の双対性に整合することを示せば十分である．定理 36.1 によれば，示すべきことは，この強双対位相が一つの $\mathfrak{S}$- 位相に一致することである．ただし，$\mathfrak{S}$ は E の凸平衡的弱コンパクト（すなわち $\sigma(E, E')$ に関してコンパクト）な部分集合からなる E の被覆である．ところで，E' 上の強双対位相は明らかに E の弱閉凸平衡的な各有界集合上の一様収束の位相と一致する．仮定によれば，これらの集合は弱コンパクトである．（証終）．

命題 36.5. 局所凸 Hausdorff な樽型空間 E が半回帰的であるならば，E は回帰的である．

証 明 E は樽型だから，E_b' の有界部分集合と E の同等連続部分集合とは一致する．E の始位相は，E' の各同等連続集合上の一様収束の位相であるが，E 上の強双対位相 (E の半回帰性を用いて，E を E_b' の双対と見なしたときの) は E'_b の各有界集合上の一様収束位相であるから，これで求める結果が出る．

回帰性に関する最終の一般結果を述べる前に，回帰的空間の強双対は明らかに回帰的であることに注意しよう．

定理 36.4. 局所凸 Hausdorff 空間 E が回帰的であるための必要十分条件は，E が樽型であって，かつ E の閉有界集合がすべて $\sigma(E, E')$ に関してコンパクトなことである．

証 明 第二の条件は，定理 36.3 により，E が半回帰的なことと同値である．もし E が回帰的ならば，E は回帰的空間 E_b' の双対であるから，命題 36.4 により，E は樽型空間である．逆に，E が半回帰的で樽型ならば，命題 36.5 により，E は回帰的である．

半回帰的空間および回帰的空間の例

例36.1. 有限次元 Hausdorff ベクトル空間，これらの空間上では，すべての局所凸 Hausdorff 位相は一致する．有界閉集合はすべてコンパクトである．任意の一つの線形基底は，E からその双対の上への同形写像を定める．

例36.2. Hilbert 空間．J を Hilbert 空間 E からその反双対 $\bar{E}'$ の上への標準的等距離写像とする．K を Hilbert 空間 $\bar{E}'$ からその反双対の上への標準的等距離写像とする．$\bar{E}'$ の反双対が E の強双対の強双対 E_b'' であることは，容易にわかる．$K \circ J$ は E から E_b'' の上への等距離写像であり，これは写像 $x \mapsto$ 'x における値' に他ならない．

例 36.3. Banach 空間が回帰的であるためには，それが半回帰的であればよい（命題 36.5 による）．Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき，$L^p(\Omega)$ は $1 < p < +\infty$ のとき回帰的である（定理 20.3）．同様に，数列の空間 l^p は，$1 < p < +\infty$ に対して，回帰的である（定理 20.1）．これらの空間 $L^p(\Omega)$ および l^p は，$p = 1$ 或いは $p = +\infty$ のときには，回帰的でない（演習問題 36.1 と 36.2 参照；また，補題 44.2 の系 2 参照）．

陪双対および回帰性との関連において，ノルム空間についての幾つかの興味のある結果を述べよう．E をノルム空間として，$x \mapsto \|x\|$ をそのノルムとする．E' をその双対とし，$x' \mapsto \|x'\|$ を E' 上の双対ノルムとする．すなわち，

(36.1)
$$\|x'\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |\langle x', x \rangle|$$

によって定義されるノルムである．E の陪双対 E'' 上では，(36.1) の双対ノルムを考えることができる．それを $x'' \mapsto \|x''\|$ によって示す．

命題 36.6. 写像 $x \mapsto$ 'x における値' は，ノルム空間 E からその陪双対 E''（陪双対ノルムを入れる）の中へ等距離写像である．

証　明　E, E', E'' における閉単位球をそれぞれ B, B, B'' としよう．命題 35.2 と 35.3 によれば，B はその陪極 B^{00} に等しい．ところで，E と E' の間の双対性および E' と E'' の間の双対性において，それぞれ $B' = B^0$, $B'' = B'^0$ となるから，$B = E \cap B''$ を得る．ただし，写像 $x \mapsto$ 'x における値' によって，E をその E'' における像と同一視した．

系　E を Banach 空間とすれば，写像 $x \mapsto$ 'x における値' は，E からその強陪双対 E_b'' の閉線形部分空間の上への等距離写像である．

命題 36.6 は，等式

$$\|x\| = \sup_{x' \in E', \|x'\|=1} |\langle x, x' \rangle|$$

によって，表現してもよい．

E がノルム空間であるが Banach 空間ではないとする．E_b'' におけるその

閉包 $\bar{E}$ は Banach 空間である．それは，E_b'' が Banach 空間だからである(ノルム空間の強双対は Banach 空間である：定理 11.5 の系)．$\bar{E}$ が E の完備化 $\hat{E}$ に標準的に同形なことは明らかである．したがって，$\bar{E}$ と $\hat{E}$ を同一視してよい．

命題 36.7. 半回帰的ノルム空間は Banach 空間であり，したがって回帰的である．

証　明　E が半回帰的であるということは，写像 $x \mapsto$ 'x における値' が E から E_b'' の上への線形等距離写像であることと同値である．E_b'' は Banach 空間だから，E も Banach 空間となる．このとき，命題 36.5 により，E の半回帰性から E の回帰性が出る．

命題 36.6 は次の命題と比較対照すべきである[1]．

命題 36.8. E をノルム空間とし．E'' をその陪双対に陪双対ノルムを入れたものとする．このとき，E の単位球 $\{x \in E\,;\|x\| \leqslant 1\}$ は，位相 $\sigma(E'', E')$ に関して，E'' の単位球 $\{x'' \in E''\,;\|x''\| \leqslant 1\}$ において稠密である．

証　明　写像 $x \mapsto$ 'x における値' によって，E を E'' の線形部分空間と同一視して考える．E の単位球 B は E'' の凸部分集合であり，E'' と E' の間の双対性の意味での B の陪極は，その弱閉凸平衡包に等しい (ここで弱位相は $\sigma(E'', E')$ と考えばならない)．ところで，この陪極は，陪双対ノルムの定義によって，集合 $\{x'' \in E''\,;\|x''\| \leqslant 1\}$ である．

系　ノルム空間Eが回帰的であるための必要十分条件は，その閉単位球が弱位相 $\sigma(E, E')$ に関してコンパクトなことである．

実際，位相 $\sigma(E, E')$ は，$\sigma(E'', E')$ の E 上の誘導位相と明らかに一致する．E の閉単位球は E'' の閉単位球において稠密だから，もし E の閉単位球が

1) E が回帰的でない Banach 空間のときの，E'' における強位相と $\sigma(E'', E')$ の対照.

$\sigma(E, E')$ に関してコンパクトならば，それは E'' の閉単位球に一致する．ゆえに $E = E''$ (ノルム空間として)．

例 36.4. Montel 空間 (定義 34.2)．これは，Banach 空間とは全く別種の，局所凸 Hausdorff 空間である．Banach 空間であって Montel 空間になるものは，有限次元 Hausdorff TVS に限る！

命題 36.9. Montel 空間 E の有界部分集合 B 上では，始位相と弱位相 $\sigma(E, E')$ は一致する．

証 明 B の閉包 $\bar{B}$ はコンパクト (始位相に関して) となるが，$\sigma(E, E')$ は Hausdorff であり，始位相よりも粗いから，コンパクト集合についてのよく知られた性質 (命題 6.8) によって，結果を得る．

系 Montel 空間は回帰的である．

命題 36.9 により，Montel 空間 E の閉有界集合は $\sigma(E, E')$ に関してコンパクトである．ゆえに，定理 36.3 によって，E は半回帰的である．ところで，E は樽型であるから (定義 34.2)，命題 36.5 によって，E は回帰的である．

命題 36.10. Montel 空間の強双対は Montel 空間である．

証 明 E を Montel 空間とし，E_b' をその強双対としよう．E は回帰的だから，E_b' は樽型空間である (命題 36.4)．E_b' の閉有界集合がすべてコンパクトであることは，すでに証明されている (命題 34.6)．

いまや，Montel 空間 $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$, $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$($\Omega$: $\mathbf{R}^n$ の開集合)，$\mathscr{S}$, $H(\mathcal{O})$($\mathcal{O}$: $\mathbf{C}^n$ の開集合) に加えて，これらの強双対 $\mathscr{E}'(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{S}'$, $H'(\mathcal{O})$ が Montel 空間であることを知ったことになる (命題 34.4 参照)．これらの空間はすべて回帰的である．

演 習 問 題

36.1. Banach 空間 E が回帰的であるためには，E_b' が回帰的であることが必要十分

であることを証明せよ．

36. 2. l^1 を，複素数列 $\sigma=(\sigma_k)(k=0,1,\dots)$ であって $|\sigma|_1=\sum_{k=0}^{\infty}|\sigma_k|<+\infty$ となるもの全体のなす Banach 空間とし；l^∞ を有界な複素数列 $\tau=(\tau_k)(k=0,1,\dots)$ の全体のなる空間に，自然なノルム $|\tau|_\infty=\sup_{k=0,1,\dots}|\tau_k|$ を入れた Banach 空間とする (11 章例 IV)．l_∞ によって，$k\to\infty$ のとき $\tau_k\to 0$ となるような複素数列 $\tau=(\tau_k)$ のなす l^∞ の線形部分空間を表わすことにする．このとき，l_∞ は l^∞ の閉線形部分空間になることを証明せよ (かくして，l_∞ はノルム $|\ \ |_\infty$ に関して Banach 空間である)．また，l^1 から l_∞ の双対の上への標準的等距離写像が存在することを証明せよ．この事実から，l^1 および l^∞ は回帰的でないことを導け (演算問題 36.1 も利用せよ)．

36. 3. Hahn-Banach の定理と空間の回帰性を利用することによって，$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ は $\mathscr{E}'(\Omega)$ および $\mathscr{D}'(\Omega)$ において稠密であることを証明せよ (Ω : $\mathbf{R}^n$ の開集合)．また，Ω の各点における Dirac 測度の有限一次結合の全体は，$\mathscr{E}'(\Omega)$ および $\mathscr{D}'(\Omega)$ において稠密であることを示せ．$\mathbf{R}^n$ の各点における Dirac 測度の有限一次結合の全体は，$\mathscr{S}'$ において稠密であることを証明せよ．

36. 4. T を位相空間とし，E を TVS, E' をその双対とする．$t\mapsto x(t)$ を T から E への写像とする．この写像が**スカラー的に連続** (scalarly continuous) であるとは，任意の $x'\in E'$ に対して，T から $\mathbf{C}$ への写像 $t\mapsto\langle x', x(t)\rangle$ が連続になることを言う．T を $\mathbf{R}^n$ (または $\mathbf{C}^n$) の開集合とするとき，$t\mapsto x(t)$ が**スカラー的に k 回連続的微分可能** ($0\leqslant k\leqslant+\infty$) である (または**スカラー的に正則**である) とは，任意の $x'\in E'$ に対して，写像 $t\mapsto\langle x', x(t)\rangle$ がその性質をもつことを言う．このとき次の結果を証明せよ．

命題 36. 11. E を Montel 空間とするとき，写像 $t\mapsto x(t)$ がスカラー的に連続 (またはスカラー的に k 回連続的微分可能，またはスカラー的に正則) とすれば，この写像は連続 (または C^k，または正則) である．

36. 5. 次の結果を，補題 36.1 を用いて証明せよ．

E を局所凸 Hausdorff 空間，F を局所凸空間とする．E から F への連続線形写像の空間 $L(E, F)$ の部分集合を H とする．H が各点収束の位相に関して有界であるとするならば，それは E の各凸平衡的完備有界集合上の一様収束の位相に関しても有界である．

36. 6. 空間 $H_{loc}^s(\Omega)$ と $H_c^s(\Omega)$ は共に回帰的であることを証明せよ (410 頁参照)．

37.

Fréchet 空間における全射

この章では，S. Banach による非常に重要な定理を述べて証明しよう．E, F を二つの Fréchet 空間として，u を E から F への連続線形写像とする．Banach の定理というのは，u が全射になる，すなわち u が E から F の上への写像（すなわち，$u(E)=F$）であるための必要十分条件を，u の転置 ${}^tu$ を用いて述べるものである．等式 (35.3) からただちにわかることは，Imu が稠密になるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\,{}^tu=\{0\}$，すなわち u が 1 対 1 になることである．u が上への写像であるということは，Im u が稠密かつ閉であることに注意しよう．ところで，一般には，${}^tu$ が 1 対 1 であることは，Im u が閉であるためには十分ではない．もちろん，F が有限次元ならば，それで十分である．なぜなら，有限次元 Hausdorff TVS の線形部分空間はすべて閉だからである．一般には十分でないことの例を示すのはやさしい．それには，二つの Hilbert 空間 H_1, H_2 を考え，H_1 から H_2 への連続単射で稠密な像をもち，同形写像にならないものが存在するようにすればよい（このとき，開写像定理により，この単射は上への写像にはならない）．たとえば，$H_1=H^1$, $H_2=H^0=L^2(\mathbf{R}^n)$ として（定義 31.4，命題 31.9 参照），包含関係 $H^1\subseteq H^0$（共に $\mathbf{R}^n$ 上の超関数の空間の部分集合として）による自然な単射をとればよい．かくして，$u(E)$ が F に一致するためには，${}^tu: F'\to E'$ が 1 対 1 であるという上に，何か或る条件が必要なことがわかる．その条件というのは，実は，${}^tu$ 自身の像が単に閉であること —— ただし，閉とは E' 上の弱双対位相 $\sigma(E', E)$ の意味での閉 —— であることがわかる．E が回帰的，たとえば Hilbert 空間であれば，これは ${}^tu(F')$ が強双対位相に関して閉であることと同値である．

$\mathrm{Im}\,{}^t u$ が弱閉であるという条件の導入は，次の問題を提起する：Fréchet 空間の双対の弱閉線形部分空間を特徴づける方法はあるか？ われわれは，この特徴づけを述べて証明することから始めよう．これは S. Banach によるものであり，次に見るように，全く簡明である．これは主定理（定理 37.2）に対する重要な補足（定理 37.3）の証明にもただちに用いられる．

定理 37.1. E を Fréchet 空間とする．E の双対 E' の線形部分空間 M' が弱閉であるためには，次の性質の成り立つことが必要十分である．

(37.1) E における 0 の近傍基底 $\mathcal{B}$ が存在して，各 $U \in \mathcal{B}$ に対して，U の極 U^0 と M' の共通部分が弱閉集合となる．

注意 37.1. E' の部分集合 U^0 は弱コンパクトであることを思い出そう（命題 32.7 と 32.8）．また，(37.1) は次の性質と同値になることに注意しよう．

(37.2) E' の任意の同等連続部分集合 H' と M' との共通部分が H' において相対コンパクトである．

(H' の位相は $\sigma(E', E)$ から導かれたものとする)．

とくに（命題 32.7 参照），(37.1) は次のことと同値になる：E における 0 の任意の近傍の極と M' の共通部分が弱閉となる．U^0 は弱コンパクトかつ同等連続だから（命題 32.7），(37.2) から (37.1) が出る．逆に，E' の任意の同等連続部分集合は，或る $U \in \mathcal{B}$ に対して U^0 に含まれる（再び命題 32.7）．もし $M' \cap U^0$ が E' で閉ならば，$M' \cap H' = M' \cap U^0 \cap H'$ は H' で閉でなければならない．ゆえに (37.1) から (37.2) が出る．

定理 37.1 の証明

U^0 は弱コンパクトだから，M' が弱閉ならば，$M' \cap U^0$ はつねに弱閉となる．したがって，(37.1) 或いは（同値な条件）(37.2) から M' が弱閉なことを証明すれば十分である．

まず，仮定（(37.1) または (37.2)）のもとに，M' が弱閉なことと，M' がコ

ンパクト収束の位相に関して閉なこととが同値であることを示そう．このことは，E_σ' と E_c' とが同じ双対，すなわち E をもつことから従う．それから，命題36.2を適用すればよいのである．ところで，われわれの主張は，次の二つの補題からの結果である．

補題 37.1. E を局所凸 Hausdorff TVS とする．E での凸コンパクト収束の位相 γ (これは E の双対 E' の位相) は，E' と E の双対性に整合する (36章459頁参照).

換言すれば，写像 $x \mapsto$ '点 x における値' が E から E_γ' の双対の上への (ベクトル空間構造に関する) 同形写像になっているというのである．

補題 37.2. Fréchet 空間[1] E の双対 E' 上では，凸コンパクト収束の位相 γ とコンパクト収束の位相 c は一致する．

補題37.1の証明　位相 γ は，E の各コンパクト凸平衡的集合上での一様収束の位相に一致する[2]．ところで平衡的凸コンパクト集合は明らかに弱位相 $\sigma(E, E')$ に関してもコンパクトである．それは，$\sigma(E, E')$ が Hausdorff であって，始位相よりも弱いからである (命題6.4)．したがって，定理36.1を適用すればよい．

補題37.2の証明　E が Fréchet 空間であってもなくても，E' のコンパクト収束の位相は，E の各コンパクト集合の閉凸包上の一様収束の位相に一致する[3]．したがって，Fréchet 空間 E においては，コンパクト集合 K の凸閉包 $\hat{K}$ はコンパクトになることを示せば十分である．ところで，それはすでに示さ

---

1) Fréchet 空間という仮定の代りに，E を準完備とすれば十分である．

2) これは，任意の凸コンパクト集合が平衡的凸コンパクト集合に含まれることに注意するとよい．たとえば，A を凸コンパクト集合としたとき，$f: \mathbf{C}\times\mathbf{C}\times E\times E \to E$ を $(\lambda, \mu, x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$ とすれば，f は連続写像であるが，この f による $D\times D\times A\times A$ (ただし D は $\mathbf{C}$ の閉単位円板)の像は平衡的凸コンパクト集合であって，A を含む．

3) これは，陪極の定理 (命題35.3) から明らか．

れている (命題 7.11 の系)[1].

以上のようにして，問題は，E が Fréchet 空間であるという仮定のもとに，条件 (37.2) から M' がコンパクト収束位相 $c(E', E)$ に関して閉であること，すなわち M' の補集合が開であることを示すことに帰着したのである．この最後の部分の証明には，次の補題に見るように，E が距離付け可能なことしか用いない．

補題 37.3. W' を E' の部分集合であって，E' の各同等連続集合との共通部分が弱開であるとする．このとき，E が距離付け可能であるならば，W' はコンパクト収束の位相に関して開集合となる．

補題 37.3 の証明 $x' \in W'$ とする．仮定のもとに証明すべきことは，E のコンパクト集合 K が存在して，$x'+K^0 \subseteq W'$ となることである．必要ならば，平行移動によって，$x'=0$ と仮定することができる[2]．そこで，$\{U_k\}$ $(k=1, 2,\ldots)$ を E における 0 の近傍基底であって，すべての k について $U_{k+1} \subseteq U_k$ となるものとする．このとき，極集合 $U_k{}^0$ はすべて同等連続集合である．

いま，$U_0=E$ として，有限集合の列 $B_n \subseteq U_n$ $(n=0, 1,\ldots)$ を，すべての $n=1, 2,\ldots$ について

$$U_n{}^0 \cap A_n{}^0 \subseteq W',\ A_n{}^0 = B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1}$$

となるように構成する．この構成は，n に関する帰納法による．$U_0{}^0=\{0\}$ であり，W' は原点 0 を含むから，A_1 をえらぶには問題はない．そこで A_n までは構成できたとして，U_n の有限部分集合 B_n を

$$U^0{}_{n+1} \cap (A_n \cup B_n)^0 \subseteq W'$$

となるようにえらぶことができることを示そう．このことが証明できれば，すべての k について B_k の存在がわかることになる．そこで，そのような B_n が存在しないと仮定してみよう．そうして，C' を W' の補集合として，$C_n{}'=$

1) これは，実は E が準完備であればよい．

2) すなわち，平行移動により，$0 \in W'$ とする．

$U^0_{n+1} \cap A_n{}^0 \cap C'$ とおく．仮定により W' は U^0_{n+1} において相対的に弱開[1] だから，C_n' は $U^0{}_{n+1} \cap A^0{}_n$ の閉部分集合となり，したがって弱コンパクトである．さて，われわれの仮定したことによれば，U_n のどんな有限部分集合 B をとっても，B^0 は C_n' と交わることになる．このような集合 B^0 の任意の有限個の共通部分もまた同じ形の集合になるから，C_n' のコンパクト性によって $B^0 \cap C_n'$ の形のすべての集合の共通部分が少なくとも一つの点 x'^0 を含まなければならない．この点 x'^0 は，U_n の任意の有限部分集合の極に属するから，したがって，U_n 自身の極に属する．すなわち

$$x'^0 \in U^0{}_n \cap A^0{}_n \cap C'.$$

ところが，帰納法の仮定により，$U^0{}_n \cap A^0{}_n \subseteq W'$ であり，W' は C' の補集合であった．かくして，矛盾に到達した．したがって，集合列 B_n の存在が証明されたことになる．そこで，この集合列の合併集合を S とすれば，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U^0{}_n \cap S^0 \overset{2)}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n{}^0 \cap A_n{}^0) \subseteq W'$$

を得る．ところで，集合列 $U^0{}_n\ (n=1,2,\ldots)$ の合併は明らかに双対空間 E' 全体になるから，$S^0 \subseteq W'$ を得る．ここで，集合 S は E において 0 に収束する点列であるから[3]，$S \cup (0)$ はコンパクト集合となる．これは，S^0 がコンパクト収束の位相に関して 0 の近傍になっていることを意味する．

以上で，補題 37.3 したがって定理 37.1 が証明された．

この章の主定理を述べて証明する前に，ここで次の記法を導入する．

記号 37.1. E を局所凸 Hausdorff TVS とし，p を E 上の連続セミノルムとする．このとき，E 上の線形汎関数であって，セミノルム p によって定義される位相に関して連続になるもの全体のなすベクトル空間を E_p' によって表わす．ベクトル空間 E に p によって定義される位相を入れたものを E_p で表わそう．p は連続だから，標準写像

---

1) $U^0{}_{n+1} \cap W'$ が $U^0{}_{n+1}$ の弱開部分集合．

2) これは $B_k \subseteq U_n\ (k \geqslant n)$ による．

3) S の元の番号付けは，まず B_0 の元に任意に番号付けを行ない，次に B_1 の元に…，というように順次進む．各 B_n が有限集合だから，それは可能．

$$E \to E_p/\mathrm{Ker}\, p$$

は連続である（E にはその始位相を，$E_p/\mathrm{Ker}p$ には p によって定義される位相の商位相を入れて考える）．この写像の転置は $E_p/\mathrm{Ker}p$ の双対から E' への単射となるが，容易に検証できるように，その像はちょうど E_p' となる．セミノルム p の閉単位球を U_p としよう．$U_p=\{x\in E\,;\,p(x)\leqslant 1\}$ である．U_p の極を $U_p{}^0$ とする．このとき，E_p' は $U_p{}^0$ によって張られる E' の線形部分空間に一致する．E_p' は代数的にはノルム空間 $E_p/\mathrm{Ker}p$ の双対に同形であるから，それは標準的に Banach 空間の構造をもつ．この構造におけるノルムは，弱コンパクト平衡凸集合（E_p' においては吸収的である）$U_p{}^0$ の "ゲージ"

$$E_p' \ni x \mapsto p'(x') = \inf_{\lambda>0,\, x'\in\lambda U_p{}^0} \lambda$$

に他ならない．E_p' がノルム p' によって Banach 空間になることは，補題 36.1 の系から出る．

演 習 問 題

37.1. $E_p' \subseteq (\mathrm{Ker}p)^0$ であることを示せ．また，E_p' は $(\mathrm{Ker}p)^0$ において弱位相 $\sigma(E', E)$ に関して稠密なことを示せ．

37.2. $E_p' \neq (\mathrm{Ker}p)^0$ となる例を挙げよ．

37.3. $E=\mathscr{C}^0(\Omega)$ を，$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の複素数値連続関数の空間に，Ω の各コンパクト集合 K 上の一様収束の位相を入れたものとする．p をセミノルム $f\mapsto \sup_{x\in K}|f(x)|$ とする．このとき，$E_p'=(\mathrm{Ker}p)^0=$［K に台が含まれる Ω 上の Radon 測度の集合］となることを証明せよ．

37.4. 次の事実を証明せよ（後に利用する）．

命題 37.1. E, F を二つの局所凸 Hausdorff TVS とする．u を E から F の上への準同形写像とすれば，E 上の各連続セミノルム p に対して，F 上の連続セミノルム q が存在して，すべての $y'\in F'$ について

$$^t u(y') \in E_p' \text{ ならば } y' \in F_q'$$

となる．

さて，この章の主定理を述べて証明しよう．

定理 37.2. E, F を二つの Fréchet 空間とし，u を E から F への連続線形写像とする．このとき，u が E を F の上へ写すためには，次の二つの条件が満たされることが必要十分である．

(a) u の転置 ${}^t u: F' \to E'$ は1対1である．

(b) ${}^t u$ の像 ${}^t u(F')$ は E' において弱閉である．

ここで，前に述べた通り，この定理に対する補足も述べておこう．この補足の証明と応用は次章で述べる．

定理 37.3. E, F, u は定理 37.2 と同様とする．
このとき，次の諸条件は同値である．

(I) u は E を F の上に写す；

(II) E 上の任意の連続セミノルム p に対して，F 上の連続セミノルム q が存在して，次のことが成り立つ．

(II_1) 各 $y \in F$ に対して $x \in E$ が存在して
$q(u(x)-y) = 0$ となる．

(II_2) ${}^t u(y') \in E_p'$ となるすべての $y' \in F'$ について

$$y' \in F_q' \text{ が成り立つ；}$$

(III) E 上の任意の連続セミノルム p に対して，F の線形部分空間 N が存在して次のことが成り立つ．

(III_1) 各 $y \in F$ に対して $x \in E$ が存在して
$u(x)-y \in N$ となる．

(III_2) すべての $y' \in F'$ ${}^t u(y') \in E_p'$ について $y' \in N^0$；

(IV) F の線形閉部分空間の非増大列

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_k \supseteq \cdots$$

が存在して，その共通部分は $\{0\}$ に等しく，次のことが成り立つ．

(IV_1) すべての $k = 1, 2, \ldots$ とすべての $y \in F$ に対して，$x \in E$ が存在して $u(x)-y \in N_k$

(IV_2) E 上の任意の連続セミノルム p に対して，整数 $k \geqslant 1$ が存在して，

$$u(x) \in N_k$$

となるすべての $x \in E$ は，E の点列 x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ で各 ν について

$$u(x_\nu) = 0$$

となるものの，セミノルム p の意味での極限になっている．

x が x_ν の p の意味での極限になっているとは，$\nu \to +\infty$ のとき $p(x - x_\nu) \to 0$ となることを意味する．

定理 37.2 の証明

$\mathrm{Ker}\,{}^t u = (\mathrm{Im}\,u)^0$ だから，条件 (a) は $\mathrm{Im}\,u = u(E)$ が F で稠密であることと同値である．したがって，条件 (b) は $u(E)$ が F で閉であることと同値なことを示すならば，定理は証明されたことになる．このことは，命題 35.7 を適用することによって得られる．ただし，そこでの u, E, F の代りに ${}^t u$, E_σ', F_σ' をおきかえる．かくして，次の補題を得る．

補題 37.4. E, F を二つの局所凸 TVS, u を E から F への連続線形写像とする．このとき，次の二つの条件は同値である．

(a) ${}^t u(F')$ は E' において弱閉である．

(b) E に弱位相 $\sigma(E, E')$ を入れ，$u(E)$ に $\sigma(F, F')$ からの誘導位相を入れたとき，u は E から $u(E)$ の上への準同形写像である．

定理 37.2 の証明のうちで，最も難しい部分は次の補題にある．

補題 37.5. E, F が共に距離付け可能であるとすれば，次の二つの条件は同値である[1)]．

(a) E に位相 $\sigma(E, E')$ を入れ，$u(E)$ に $\sigma(F, F')$ から誘導位相を入れたとき u は E から $u(E)$ の上への準同形写像である．

(b) (始位相に関して) u は E から $u(E)(\subseteq F)$ の上への準同形写像である．

補題 37.5 の証明を述べる前に，この補題からどのようにして，補題 37.4 の

---

1) もちろん，E, F 共に局所凸とし，u は E から F への連続線形写像とする．

条件 (a) と $u(E)$ が F において閉になるという事実の同値を導くかについて述べよう．写像 u についての通例の図式を考える．

$$
\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{u} & u(E) \subseteq F \\
{\scriptstyle\varphi}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle v} & \\
E/\mathrm{Ker}\, u & &
\end{array}
\tag{37.3}
$$

ここで，φ は E から商空間 $E/\mathrm{Ker}u$ の上への標準的準同形写像であり，v は $E/\mathrm{Ker}\,u$ から $u(E)$ の上への，図式 (37.3) を可換にすることにより一意的に定まる 1 対 1 線形写像である．u は連続であるから，v も連続である．v が (TVS 構造についての) 同形写像ならば，定義によって，u に準同形写像となる．ところで，E, F が共に Fréchet 空間のときには，v が同形写像になるのは，$u(E)$ が閉のときそのときに限る．実際，v が同形写像であれば，$u(E) = \mathrm{Im}\,u$ は Fréchet 空間 $E/\mathrm{Ker}u$ に同形となり，したがって，閉である．逆に，もし $u(E)$ が F で閉であれば，$u(E)$ は誘導位相に関して Fréchet 空間となり，したがって v は Fréchet 空間 $E/\mathrm{Ker}u$ からもう一つの Fréchet 空間 $u(E)$ の上への 1 対 1 連続線形写像となる．開写像定理 (定理 17.1) により，v は同型写像でなければならない．

さて，補題 37.5 を証明しよう．

補題 37.5 の証明　図式 (37.3) にもどって考えよう．証明すべきことは，次のことである．v が (E, F には始位相を，$E/\mathrm{Ker}\,u$ には対応する商位相を入れたときの) 同形写像であるためには，E には $\sigma(E, E')$, F には $\sigma(F, F')$, $E/\mathrm{Ker}u$ には，$\sigma(E, E')/\mathrm{Ker}\,u$ を入れたときに u が同形写像になることが必要十分なことである．

さて，v および ($u(E)$ 上で定義された) v^{-1} に次の結果を適用しよう．

補題 37.6.　E を距離付け可能な局所凸 TVS, F を局所凸 Hausdorff TVS とし，u を E から F への線形写像とする．いま，E, F にそれぞれの弱位相 $\sigma(E, E')$, $\sigma(F, F')$ を入れたときに u が連続になるとすれば，u は (E, F の始

位相について）連続である．

補題 37.6 の証明 $\{U_k\}(k=1, 2, \ldots)$ を E の 0 の近傍基底とし，$U_k \subseteq U_{k-1}$ ($k \geqslant 2$) とする．もし u が連続でなければ，F の 0 の平衡的近傍 V が存在して，$u^{-1}(V)$ は E の 0 の近傍にならない．したがって，$u^{-1}(V)$ は集合 $(1/k)U_k$ のどれをも含まないから，各 k について E の元 x_k を $kx_k \in U_k$, $u(x_k) \notin V$ となるようにえらぶことができる．点列 kx_k は E において 0 に収束するから，もちろん $\sigma(E, E')$ に関しても 0 に収束する．したがって，F において点列 $ku(x_k)$ は $\sigma(F, F')$ に関して相対コンパクトである．ゆえに Mackey の定理（定理 36.2）によって，この点列は F において（始位相に関しても）有界となる．したがって，数 $\lambda>0$ が存在して，$ku(x_k) \in \lambda V$ がすべて k について成立する．これは点列 x_k に対する仮定に反する[1]．（証終）．

補題 37.6 と命題 35.8 を組合せれば，距離付け可能な局所凸 TVS から局所凸 Hausdorff TVS への線形写像が連続になるには，両方の空間に弱位相を入れたときに連続になることが必要十分であるということがわかる．この事実を念頭において，補題 37.5 の証明を進めよう．

Ker u が E において閉であること（なぜなら，u は連続だから）を思い出せば，v は距離付け可能な空間 $G=E/\mathrm{Ker}\ u$ からもう一つの距離付け可能な空間 $H=u(E)$ の上への 1 対 1 の線形写像であることがわかる．ちょうど上に述べたことによれば，$\sigma(G, G')$ を入れた G から $\sigma(H, H')$ を入れた H への写像として，v は連続である．同様に，$v^{-1}: H \to G$ が連続になるには，H に $\sigma(H, H')$ を入れ，G に $\sigma(G, G')$ を入れたときに連続となることが必要十分である．したがって，次の二つの事実を証明すれば，補題 37.5 は証明されたことになる．

(37.4) $$\sigma(G, G')=\sigma(E, E')/\mathrm{Ker}\ u.$$

(37.5) $\sigma(H, H')$ は H 上に $\sigma(F, F')$ から誘導された位相と一致する．

H' は F'/H^0 に標準的に同形であることを思い出すならば，(37.5) に述べてあることは全く明白である．(37.4) について言えば，命題 35.5 と 35.6 から直ち

1) ここでVが平衡的なことを用いた．

に出る．実際，命題 35.5 の (a) によれば，$G = E/\mathrm{Ker}\,u$ の双対は (Kar$u$) に標準的に同形である．他方，命題 35.6 を E と E' を入れ換え $N = (\mathrm{Ker}\,u)^0$ (これは E_σ' の閉線形部分空間である) として適用するならば，

$$\sigma(E/\mathrm{Ker}\,u,\ (\mathrm{Ker}\,u)^0) = \sigma(E,\ E')/\mathrm{Ker}\,u$$

を得る．これらのことを組合せて，(37.4) を得る．

これで，定理 37.2 の証明は完成した．定理 37.3 の証明は次章で述べる．

演 習 問 題

37.5. 定理 37.2 において，E, F が Fréchet 空間であるという仮定を，E, F 共に回帰的 Fréchet 空間の双対であるという仮定におきかえても，結論は正しいことを証明せよ．

37.6. $P(\partial/\partial X) = P(\partial/\partial X_1, \ldots, \partial/\partial X_n)$ とする．ただし，$P \in \mathcal{P}_n$，すなわち複素係数をもつ n 不定元の多項式とする．$P(\partial/\partial X)$ を $\mathcal{Q}_n$，すなわち $X = (X_1, \ldots, X_n)$ の形式的巾級数の空間に作用させる．このとき，$P = 0$ でなければ，$P(\partial/\partial X)$ は $\mathcal{Q}_n$ をそれ自身の上へ与すことを証明せよ (定理 37.2 を用いよ)．

37.7. イデアル $u\mathcal{Q}_n$, $u \in \mathcal{Q}_n$ はすべて $\mathcal{Q}_n$ において閉であることを証明せよ ($\mathcal{Q}_n$ からそれ自身への写像 $v \mapsto uv$ を考察せよ；それが全射であることを示し，演習問題 37.5 を適用せよ)．

37.8. 次のことを証明せよ．

補題 37.7. E, F を二つの局所凸 Hausdorff TVS とし，$u : E \to F$ を連続線形写像とする．このとき，次の二つの条件は同値である．

(a) u は E から $u(E) \subseteq F$ の上への準同形写像である．

(b) ${}^t u(F')$ は E' において弱閉であり，すべての同等連続集合 $A' \subseteq {}^t u(F')$ は F' の同等連続集合の ${}^t u$ による像になっている．

38.

Fréchet 空間における全射(続き)とその応用

定理 37.3 の証明に進もう.

定理 37.3 の証明

命題 37.1 [1] によって, (I) から (II) が出る. 実際, $u(E)=F$ ならば, 開写像定理により, u は E から F の上への準同形写像となるからである. (II) から (III) の出るのは自明である. $N=\mathrm{Ker}\, q$ とおきさえすればよい.

さて, (III) から (IV) が出ることを証明しよう. そのために, まず (III) から定理 37.2 の (b), すなわち ${}^t u(F')$ が E' において弱閉になることが従うことを示そう. 定理 37.1 を次のような仕方で適用する. E の 0 の近傍基底として, E 上の各連続セミノルム p に対する閉単位球 U_p をとり, ${}^t u(F') \cap U_p{}^0$ が弱閉なことを示すのである. ${}^t u$ によるこの集合の逆像を H' としよう. (III) において, セミノルム p に対応する F の線形部分空間を N とする. $y' \in H'$ とすると, ${}^t u(y') \in U_p{}^0 \subseteq E_p{}'$ (記号 37.1) であり, したがって, $y' \in N^0$ である. いま, $y \in F$ を任意の元として, $x \in E$ を $y-u(x) \in N$ となるようにとる. このとき, ($y' \in H'$ に対して) 次式が成り立つ.

$$\langle y', y\rangle = \langle y', u(x)\rangle = \langle {}^t u(y'), x\rangle.$$

この等式からまずわかることは, 写像 $y' \mapsto {}^t u(y')$ は, H' からその像 ${}^t u(F') \cap U_p{}^0$ の上への位相同形写像になることである (ただし, 位相はそれぞれ $\sigma(F',$

1) 演習問題 37.4 を見よ.

F), $\sigma(E', E)$ による誘導位相とする)[1]．次にわかることは，H' が弱有界なことである．なぜなら，y' が H' を動くとき，${}^t u(y')$ は弱有界集合 $U_p{}^0$ の中を動くからである[2]．ところで，F は樽型空間だから（命題 33.2 の系 1）Banach-Steinhaus の定理（定理 33.2）によって，H' は同等連続集合となり，したがって，その弱閉包 $\bar{H}'$ は F' の弱コンパクト部分集合となる（命題 32.8）[3]．かくして，${}^t u$ の $\bar{H}'$ への制限は，$\bar{H}'$ から ${}^t u(F') \cap U_p{}^0$ の弱閉包の上への弱連続写像である[4]．${}^t u(F') \cap U_p{}^0$ の弱閉包は弱コンパクト集合 $U_p{}^0$ に含まれている．それは ${}^t u(\bar{H}')$ に等しいから[5]，${}^t u(F')$ にも含まれている．したがって，それは，${}^t u(F') \cap U_p{}^0$ に一致する．

かくして，(III) から ${}^t u(F')$ が弱閉なることが出る．ところで

$$\operatorname{Ker}{}^t u = (\operatorname{Im} u)^0, \quad \text{また} \quad \operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im}{}^t u)^0$$

が成り立つ．これより

$$(\operatorname{Ker} u)^0 = (\operatorname{Im}{}^t u)^{00} = \operatorname{Im}{}^t u \text{ の弱閉包}$$

を得る．いまの場合は $\operatorname{Im}{}^t u$ は弱閉だから

$$\operatorname{Im}{}^t u = (\operatorname{Ker} u)^0 \tag{38.1}$$

となる．この等式は，直ぐ後で利用する．

さて，(III) から (IV) が出ることの証明を完成しよう．$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_k \leqslant \cdots$ を E 上の連続セミノルムの列であって，E 上の任意の連続セミノルム p に対して整数 $k \geqslant 1$ が存在して $p \leqslant p_k$ となるものとしよう．このような列の存在は明らかである．たとえば，0 の閉凸平衡的近傍からなる減少的[6] 可算近傍

1) 写像が 1 対 1 であることは，$y', z' \in H'$, ${}^t u(y') = {}^t u(z')$ とすると，上の等式から，すべての $y \in F$ について $\langle y', y\rangle = \langle z', y\rangle$ となることより，$y' = z'$ を得るからよい．この写像の連続性は明らかだが，上の等式により，逆も連続である．

2) このことから，上の等式を用いれば，任意の $y \in F$ に対して $\sup_{y' \in H} |\langle y', y\rangle| < +\infty$. すなわち H' は弱有界．

3) $H' = {}^t u^{-1}(U_p{}^0)$ であり，$U_p{}^0$ は弱コンパクト，${}^t u$ は弱連続だから，H' は弱閉であり，したがって実際は $\bar{H}' = H'$ である．本文の議論は，このことにより簡単になる．もとのままでは稍不正確．

4) 前脚注 3) により位相同形写像である．

5) 前脚注 3), 4) による．

6) decreasing，すなわち集合がつぎつぎに小さくなってゆくもの．

基底に属する各集合に付随するセミノルムをとればよい．各 $k=1, 2, \ldots$ に対して，N^k を (III) において p_k に対応する F の線形部分空間とする．線形部分空間 N_k としては，$l \geqslant k$ となる部分空間の代数和の閉包をとる（この代数和の元とは，$N^l, l \geqslant k$ に属するベクトルの有限和である）．まずこれらの N_k の共通部分が $\{0\}$ に等しいことの証明から始めよう．$y' \in F'$ を任意の元とする．${}^t u(y')$ は E 上の連続線形形式だから，整数 $k \geqslant 1$ が存在して，${}^t u(y') \in E'_{p_k}$ となる（記号 37.1）．したがって，(III_2) により，$y' \in (N^k)^0$ となる．$l \geqslant k$ ならば $p_k \leqslant p_l$ だから，もちろん $E'_{p_k} \subseteq E'_{p_l}$ であり，したがってこれらの l に対しては $y' \in (N^l)^0$ である．$l \geqslant k$ なるすべての l について，y' は N^l に直交するから，y' はこれらの空間の代数和の直交に属し，したがってこれらの代数和の閉包の直交に属する．すなわち，$y' \in (N_k)^0$ である．したがって，とくに，y' は $N_j, j=1, 2, \ldots$ のすべての共通部分に直交する．y' は任意だったから，Hahn–Banach の定理により，この共通部分は $\{0\}$ に等くなければならない．

$N^k \subseteq N_k$ であったから，(III_1) から (IV_1) が出るのは明らかである．

最後に (IV_2) を導き出そう．p を E 上の任意の連続セミノルムとし，整数 $k \geqslant 1$ を $p \leqslant p_k$ なるものとする．このとき，$\mathrm{Ker}\, u$ が $H_k = u^{-1}(N_k)$ において，セミノルム p によって定義される位相に関して稠密であることを示そう．Hahn–Banach の定理（定理 18.1）の系 1 によれば，セミノルム p に関して連続な E 上の線形形式のうちで，$\mathrm{Ker}\, u$ 上で 0 になるものはすべて H_k 上でも 0 になることを示せば十分である．x' をそのような任意の線形形式としよう．$x' \in E'$ は $\mathrm{Ker}\, u$ に直交するから，(38.1) によって，$y' \in F$ が存在して $x' = {}^t u(y')$ と書ける．$x' \in E'_{p_k}$ だから，(III_2) から $y' \in (N^k)^0$ となる．$l \geqslant k$ なるすべての l についてももちろん $x' \in E'_{p_l}$ であるから，同じ議論によって $y' \in (N_k)^0$ を得る．ところで，このときには $x \in H_k$ に対して

$$\langle x', x \rangle = \langle {}^t u(y'), x \rangle = \langle y', u(x) \rangle = 0$$

を得る．なぜなら $u(x) \in N_k$ だからである．これで (III) ⇒ (IV) は完全に証明された．残るところは，(IV) から (I) の出ることの証明である．

前に述べた E 上の連続セミノルム基底 p_k を利用する．必要ならば番号をつ

け直して[1]，各 k に対して N_k は (IV_2) において p_k に対応するものとする．各 $x \in u^{-1}(N_k)$ は $\operatorname{Ker} u$ における点列の，p_k に関する，極限になっている．y を F の任意の元としよう．(IV_1) を適用することによって，$x_1 \in E$ をえらんで，$y_1 = y - u(x_1) \in N_1$ とすることができる．同様に，$k = 2, 3, \ldots$ に関する帰納法によって，E の元の列 x_k と F の元の列 y_k をえらんで

$$y_k = y_{k-1} - u(x_k) \in N_k$$

とすることができる．このとき，$u(x_k) = y_{k-1} - y_k$ となることに注意すれば，$h_k \in \operatorname{Ker} u$ が存在して $p_{k-1}(x_k - h_k) \leqslant 2^{-k}$ となるから，級数

$$x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (x_k - h_k)$$

は E において絶対収束する[2]．この極限を x とする (E が完備だから極限は存在する)．各 $r > 1$ に対して

$$z_r = x_1 + \sum_{k=2}^{r} (x_k - h_k)$$

とおけば，

$$u(z_r) = \sum_{k=1}^{r} u(x_k) = y - y_r$$

を得る．したがって

$$u(z_r) - y \in N_r$$

であるが，すべての $s \geqslant r$ に対して $N_s \subseteq N_r$ であるから，$s \geqslant r$ ならば

$$u(z_s) - y \in N_r$$

である．ここで，N_r が閉であったことに注意して，$s \to +\infty$ の極限をとれば

$$u(x) - y \in N_r$$

を得る)．整数 r はいくら大きくてもよいから，$y - u(x)$ はすべての N_r の共通部分に属し，したがって 0 に等しい．

これで定理 37.3 の証明は完成した．

---

1) すなわち，適当な部分列をとって，それをあらためて N_k として．

2) すなわち，E 上の任意の連続セミノルム p に対して，$\sum_{k=1}^{\infty} p(\tilde{x}_k)$ が収束する (ただし，$\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_k = x_k - h_k$ $(k \geqslant 2)$)．E が完備ならば，絶対収束する級数は明らかに収束する．

定理 37.2 の応用：E. Borel の定理

ここでは，定理 37.2 の非常に簡単な応用を述べよう．E. Borel の古典的な次の定理の証明に応用してみよう．

定理 38.1. Φ を複素数を係数とする n 変数の任意の形式的巾級数とするとき，$\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{C}^\infty$ 関数 φ が存在して，その原点における Taylor 展開が Φ に一致する．

換言するならば，整数 $p_j \geqslant 0$ の各 n-系 $p=(p_1,\ldots,p_n)$ に対して任意に複素数 a_p をあたえておくとき，$\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{C}^\infty$ 関数 φ が存在して，すべての p について $(\partial/\partial x)^p\varphi|_{x=0}=a_p$ が成り立つということである．

定理 38.1 の証明　各関数 $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ にその原点における Taylor 展開を対応させる写像を u で表わそう．この Taylor 展開を，複素数を係数とする n 変数の形式的巾級数の空間 $\mathcal{Q}_n$ の元と見なす．証明すべきことは，u が全射になることである．$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ には自然な $\mathcal{C}^\infty$ 位相を入れ，$\mathcal{Q}_n$ には係数の単純収束の位相を入れる (10 章例 I および III)．$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の双対は，$\mathbf{R}^n$ においてコンパクトな台をもつ超関数の空間 $\mathcal{E}'$ であり；$\mathcal{Q}_n$ の双対は，複素係数をもつ n 変数の多項式の空間 $\mathcal{P}_n$ である (22 章)．このとき，u の転置 ${}^t u$ はどのような写像になるだろうか？

写像 u は次の形になることに注意しよう．

$$\varphi \mapsto \sum_{p\in\mathbf{N}^n}\frac{1}{p!}[(\partial/\partial x)^p\varphi(0)]X^p.$$

$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ と $\mathcal{E}'$ の間の双対性，また $\mathcal{P}_n$ と $\mathcal{Q}_n$ の双対性の括弧式をともに $\langle,\rangle$ で表わすことにすれば，任意の多項式

$$P(X)=\sum_{p\in\mathbf{N}^n}P_pX^p$$

に対して

$$\langle P,\, u(\varphi)\rangle = \sum_{p\in\mathbf{N}^n} \frac{1}{p!} P_p[(\partial/\partial x)^p \varphi(0)] = \langle \widetilde{P}(-\partial/\partial x)\delta,\, \varphi\rangle$$

を得る．ここで，δ は原点における Dirac 測度であり，$\widetilde{P}$ は

$$\widetilde{P}(-\partial/\partial x) = \sum_{p\in\mathbf{N}^n} (-1)^{|p|} \frac{1}{p!} P_p(\partial/\partial x)^p$$

である．これは，u の転置が $\mathcal{P}_n$ から $\mathcal{E}'$ への写像 $P \mapsto \widetilde{P}(-\partial/\partial x)\delta$ であることを意味している．かくして，${}^t u$ の像が何になるかは明らかである．それは，原点における Dirac 測度の導関数のすべての一次結合からなる空間である．ところで，この空間は原点を台とするすべての超関数（に 0 超関数を付加した）の空間であることが分かっており（定理 24.6），明らかに閉である．すなわち，弱閉である．また，${}^t u$ が 1 対 1 であることも明らかである（たとえば，$\widetilde{P}(-\partial/\partial x)\delta$ に Fourier 変換を施してみるとよい）．したがって，定理 37.2 の条件 (a), (b) を満たしていることがわかる．これから結果が従う．

定理 37.3 の応用：偏微分方程式の $\mathcal{C}^\infty$ 解の存在定理

いつものように，Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．Ω 上で定義された $\mathcal{C}^\infty$ 係数をもつ一つの偏微分作用素 D を考察しよう（23 章例 III 参照）．我々が明らかにしたいのは，方程式

$$Du = f$$

が，すべての $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ に対して解 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ をもつための，Ω, D に関する必要十分条件である．方程式 $Du = f$ のこの性質は，換言するならば，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ からそれ自身への連続線形写像 D が Fréchet 空間 $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ から自身への全射であること，すなわち

$$D\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

が成り立つことである．

目標とする必要十分条件を述べるため，まず二つの定義を述べねばならない．

定義 38.1. 開集合 Ω が **D-凸** (D-convex) であるとは，Ω の任意のコンパクト部分集合 K と任意の整数 $k \geqslant 0$ に対して，Ω のコンパクト部分集合 $\widehat{K}(k)$ が存在して，Ω においてコンパクトな台をもつすべての超関数 μ について次のことが成り立つことを言う．

(38.2) ${}^tD\mu$ の位数が $\leqslant k$ であって $\operatorname{supp}{}^tD\mu \subseteq K$ ならば，

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq \widehat{K}(k).$$

用いた記号を説明しておこう．T を超関数とするとき，$\operatorname{supp} T$ は T の台を表わす．微分作用素 D は $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (または $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$) からそれ自身への連続線形写像として見ているが (命題 23.3)，このとき ${}^tD$ はその転置写像として定義される微分作用素である．${}^tD$ は $\mathcal{D}'(\Omega)$ (または $\mathcal{E}'(\Omega)$) からそれ自身への連続線形写像である．もし，座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$ に関する D の表現が

$$P(x, \partial/\partial x) = \sum_{|p|\leqslant m} a_p(x)(\partial/\partial x)^p$$

であるならば，同じ座標系に関する ${}^tD$ の表現は $P(x, \partial/\partial x)$ の‘形式的転置’(定義 23.3)

$${}^tP(x, \partial/\partial x) = \sum_{|p|\leqslant m} (-1)^p(\partial/\partial x)^p a(x)$$

として得られる．超関数の位数の概念については，定義 24.3 を参照せよ．

さらに，次の定義を必要とする．

定義 38.2. 微分作用素 D が Ω において**半大域的に可解** (semiglobally solvable) であるとは，Ω の任意の相対コンパクト開部分集合 Ω' に対して，次のことが成り立つことを言う．

(38.3) 任意の関数 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ に対して，$\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ が存在して，$D\psi = \phi$ が Ω' において成り立つ．

さて，目標の結果を述べよう．

定理 38.2. D を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の $\mathcal{C}^\infty$ 係数をもつ微分作用素とする．このとき，次の二つの性質は同値である．

(38.4)　任意の $f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ に対して，$u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ が存在して $Du=f$

(38.5)　開集合 Ω は D–凸 であり，D は Ω において半大域的に可解である．

定理 38.2 の証明　定理 37.3 を $E=F=\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $u=D$ として適用する．そうして，(38.5) が定理 37.3 における条件 (II) および (III) と同値なことを示す．まず (38.3) から (III) が出ることを示そう．p を $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 上の連続セミノルムとすると，$\mathcal{C}^\infty$ 位相の定義によって，Ω のコンパクト集合 K，整数 $m\geqslant 0$ と定理 $C>0$ が存在して，すべての $\phi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ について

$$p(\phi)\leqslant C\sup_{x\in K}\sum_{|p|\leqslant m}|(\partial/\partial x)^p\phi(x)|$$

が成り立つ．この不等式からただちにわかることは，セミノルム p に関して連続な超関数 $\mu\in\mathcal{E}'(\Omega)$ はすべてその台が K に含まれ，その位数は $\leqslant m$ となることである．次に，Ω の D–凸性を用いれば，Ω のコンパクト集合 K' が存在して，超関数 $\mu\in\mathcal{E}'(\Omega)$ のうちで，${}^tD\mu$ の位数が $\leqslant m$ であって $\operatorname{supp}{}^tD\mu\subseteq K$ となるものは，すべて $\operatorname{supp}\mu\subseteq K'$ となる．そこで，Ω' を Ω の相対コンパクト開部分集合で K' を含むものとする．D は Ω において半大域的に可解だから，任意の $f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ に対して $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ が存在して，$Du-f\in N$ となる．ただし，N は Ω' 上で 0 となる関数のなす $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の部分空間である．更に，上に見たように，$\mu\in\mathcal{E}'(\Omega)$ が ${}^tD\mu\in E_p{}'$ を満たすならば，$\mu\in N^0$ を得る．これで (III) が証明された．

最後に，(II) から (38.5) が出ることを証明しよう．m を非負整数とし，K を Ω のコンパクト集合とする．K_1 を Ω のもう一つのコンパクト集合であって，K をその内部に含むものとする．Ω 上で位数 $\leqslant m$ で，その台が K に含まれる超関数は，すべて $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の線形形式で，セミノルム

$$p(\phi)=\sup_{x\in K_1}\sum_{|p|\leqslant m}|(\partial/\partial x)^p\phi(x)|$$

に関して連続である．(II) によれば，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 上のもう一つの連続セミノルム q が存在して，$\mu\in\mathcal{E}'(\Omega)$ は，もし ${}^tD\mu$ が p に関して連続ならば，μ 自身が q に関して連続となる．この証明の前段で用いた議論によれば，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 上の連続セミノルム q に対して Ω のコンパクト集合 K' が存在して，q に関して連続な

$\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ はすべてその台が K' に含まれる[1]. (証終)

定理 37.3 の (IV) は用いなかったけれども，定理 38.2 の場合に応用するならば，それは重要な意味をもっている. $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ における増大する連続セミノルム基底をえらぼう. いまの場合，それは連続セミノルムの列

$$\phi \mapsto p_k(\phi) = k \sup_{x \in K_k} \sum_{|p| \leqslant k} |(\partial/\partial x)^p \phi(x)|$$

としてよい. ここで $\{K_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ は Ω のコンパクト集合列であって，$K_k \subseteq K_{k+1}$ となり，その内部の合併が Ω を覆うものとする. Ω は D-凸 だから，各 $k = 1, 2, \ldots$ に対して Ω のコンパクト集合 K_k' が存在して[2]，超関数 $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ は，もし ${}^tD\mu$ がセミノルム p_k の位相に関して連続ならば，つねに $\operatorname{supp} \mu \subseteq K_k'$ となる. いま，Ω_k' を K_k' の Ω における相対コンパクトな開近傍としよう. これらの開集合 Ω_k' を $\Omega_k' \subseteq \Omega_{k+1}'$ となるようにとっておき，N_k を Ω_k' 上で恒等的に 0 となる関数からなる $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の (閉) 部分空間とする. 定理 37.3 における (II) ⇒ (III) ⇒ (IV) の証明を見ればただちにわかるように，部分空間列 N_k は (IV) に掲げたすべての性質を持っている. とくに，(IV_2) に関してわかることは，$k \geqslant 1$ に対して，線形偏微分方程式 $D\phi = 0$ を Ω_k' において満たす任意の関数 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ は，Ω 全体で $D\phi_\nu = 0$ を満たす関数列 $\phi_\nu \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ によるコンパクト集合 K_k 上での次数 $\leqslant k$ の導関数までの一様収束の極限になっていることである. (すべての k について $K_k \subseteq K_k'$ であることに注意せよ；演習問題 38.4 参照).

注意 38.1. $\mathbf{R}^n$ において或る種の開集合は D-凸 であるにもかかわらず，どの開集合 (任意の開集合) においても半大域的に可解でない微分作用素 D の例を挙げることができる. 他方，定数係数の微分作用素はつねに半大域的に可解であるが (下に掲げる演習問題 38.1 参照)，一般には，そのような作用素 D があたえられたとき，$\mathbf{R}^n$ の開集合で D-凸 でないものが存在する. これらの事

1) これで Ω の D-凸性が得られた. D の Ω における半大域的可解性は (II_1) からただちに得られる.

2) $K_k' \supseteq K_k$ としてよい.

実は，二つの性質：'Ω の D-凸 性' と 'D の Ω における半大域的可解性' の独立なことを示している．

演習問題

38.1. 微分作用 D は ($\mathbf{R}^n$ の或る座標系 $x_1,\ldots,x_n$ に関して) 定数係数をもつとし，D は恒等的には 0 でないとする．このとき，$\mathbf{R}^n$ 上の超関数 E が存在して，$DE=\delta$ を満たすことが証明できる．この事実を認めて，$\mathbf{R}^n$ の任意の開集合において D は半大域的に可解であることを導け．

38.2. D を微分作用素とし (全部は 0 ではない) 定数係数をもつとする．このとき，$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω が D-凸 であるための必要十分条件は，Ω の任意のコンパクト集合 K に対して，Ω のもう一つのコンパクト集合 K' が存在して，すべての $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ について

$$\operatorname{supp} P(-D)\phi\subseteq K \quad \text{ならば} \quad \operatorname{supp}\phi\subseteq K'$$

が成り立つことである．このことを証明せよ．

38.3. D を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の $\mathcal{C}^\infty$ 係数の微分作用素であって，次の性質をもつとする．

(AHE)[1]　Ω の任意の開部分集合と Ω' 上の任意の超関数 T について，DT が Ω' 上解析関数であるときには，T は Ω' の解析関数となる．

このとき，Ω は D-凸 であることを証明せよ．

38.4. D を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω の上で定義された $\mathcal{C}^\infty$ 係数をもつ線形偏微分作用素とする．D は Ω において半大域的に可解であると仮定しよう．また，K を Ω のコンパクト集合とし，m を整数 >0 とする．このとき，次のことを証明せよ．K' を Ω のコンパクト部分集合とする．もし，超関数 $\mu\in\mathcal{E}'(\Omega)$ のうちで ${}^tD\mu$ の位数が $\leqslant m$ で，その台が K に含まれるものはすべて $\operatorname{supp}\mu\subseteq K'$ となるとするならば，必然的に $K\subseteq K'$ となる．

$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身の上への (TVS 構造に関する) 同形写像 J であって，次の性質をもつものの例を挙げよ．J は $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ からそれ自身の上への同形写像を誘導する．$\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合 K が存在して，$\mu\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ のうちで $\operatorname{supp} J\mu\subseteq K$ となすものは，すべて $K\cap\operatorname{supp}\mu=\emptyset$ となる．

---

1)　AHE は **analytic hypoellipticity** (解析的準楕円性) の略．

第III部

テンソル積. 核

第III部の話題は，主として関数や超関数の空間のテンソル積と，そのテンソル積空間のもつ種々の自然な位相，およびそれらの位相テンソル積の完備化として得られる局所凸空間である．これらの完備化空間の元は，しばしば‘核(kernel)’とよばれる．これが第III部の表題に‘核’と書いた理由である．

この第III部は，二つのベクトル空間のテンソル積の定義(39章)で始まる．われわれの定義は，一般に受け入れられている‘普遍性(universal property)’による定義(これは定理39.1として述べる)とは少々違った定義である．実際の応用上から言えば，既にあたえられた空間Mが他の二つの空間EとFのテンソル積であるかどうかを知る必要がある．たとえば，一つの双線形写像ϕ: $E\times F\to M$が存在し，この像がMを張り，EおよびFにおいてそれぞれ一次独立なベクトルの集合$\{x_\alpha\}$，$\{y_\beta\}$に対して$\{\phi(x_\alpha, y_\beta)\}$が$M$において一次独立であるような場合である(このときにはMよりも，対(つい)(M, ϕ)のことをEとFの一つのテンソル積であると呼んだ方が自然である)．同章においては，本質的には関数空間から成る若干の例を挙げる．超関数の空間から成る例は40章で述べる．その前に，一つの局所凸空間Eに値をもつ可微分関数の概念を導入する．これを用いて，テンソル積$\mathcal{C}^k\otimes E$ $(0\leqslant k\leqslant +\infty)$が定義できる．その元は，$E$に値をもつ$\mathcal{C}^k$関数であって，その像が$E$の有限次元部分空間を張るものである．二つの超関数のテンソル積を定義し，その基本的性質(Fubini型の定理40.4を含む)の証明を述べる．次の章，41章は，双線形写像と重要な準連続性(hypocontinuity)の概念に当てる．37章または38章まで読み進んだ学生諸君は‘迷わずに’是非とも39, 40, 41の諸章の内容を身につけ，テンソル積と双線形写像に慣れるようにすべきである．

ベクトル空間をテンソル積として表現する際に，最初に目立つことは，その分解の様子である．テンソル積型の分解は，代数学においては極く普通のこと

である. 我々に関連のある問題においては, 通例それは '基礎空間' における変数の分離にもとづくものである. たとえば, 積空間 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ 上で定義された関数を取り扱うのに, その変数を (x, y) のように表示することができよう. このとき, これらの関数を, 始めの変数 x の関数であって, その値を後の変数 y の適当な関数 (または超関数) 空間の中にもつと見なした方が便利な場合もある. このようにして, 例えば $\mathcal{E}^\infty_{x,y}$ を, $\mathcal{E}_y{}^\infty$ に値をもつ x の $\mathcal{E}^\infty$ 関数の空間と見ることができる. このような事情をもつと包括的に, 一般的に研究して, 任意の局所凸空間に値をもつ関数や超関数を取り扱うことを試みることは自然であろう. これらのうちで最も単純なものは, その像が '値空間' E の有限次元部分空間を張るものである. これらのものは一つの線形空間を構成するが, それは一般に, E と適当な複素数値関数とのテンソル積と見なすことができる. このことは, 既に $\mathcal{E}^\infty(E)$ を取り扱う際に見た (上述の $\mathcal{E}^\infty \otimes E$ を見よ). しかしながら, 解析学においては, 有限次元性の限界を超えて進むことが必要になる. そのために, 位相的な性格をもつ他の操作 —— 収束の概念の定義, 極限点の付加, たとえば完備化など —— がテンソル積の構成につづいて必要になる. 空間 $\mathcal{E}^\infty_{x,y}$ とテンソル積 $\mathcal{E}_x{}^\infty \otimes \mathcal{E}_y{}^\infty$ とは, 有意味な仕方では, 決して等しいとは見なせない. なぜなら, 後者の元は $\sum_j u_j(x)v_j(y)$, $u_j \in \mathcal{E}_x{}^\infty$, $v_j \in \mathcal{E}_y{}^\infty$ の形の有限和と見なさなければならないからである. しかし, ここで見逃してはならない点は, $\mathcal{E}_x{}^\infty \otimes \mathcal{E}_y{}^\infty$ は $\mathcal{E}^\infty_{x,y}$ 全体とは一致しないけれども, その稠密な線形部分空間になることである (定理 15.3 の系). したがって, $\mathcal{E}^\infty_{x,y}$ は $\mathcal{E}_x{}^\infty \otimes \mathcal{E}_y{}^\infty$ の一つの完備化と見なすことができる. とくに, $\mathcal{E}^\infty_{x,y}$ は $\mathcal{E}_x{}^\infty \otimes \mathcal{E}_y{}^\infty$ に一つの位相を誘導する. この位相は, 種々の理由からして, '自然なもの' と考えるべきものである. 一般に, テンソル積 $E \otimes F$ に位相を入れて完備したいと思うならば, その位相を内在的に定義する仕方が必要となる. それには, E および F 上のセミノルムから直接出発するか, または, そこには既に '自然な' 位相が存在するような E と F に関係した適当な空間への $E \otimes F$ の埋め込みを利用する. 第1の方法によれば, いわゆる射影的位相または π 位相とよばれるものに導かれる. 第2の方法によれば, 種々の位相が得られるが, そのうちで最重要なもの

は ε 位相である (ε は同等連続 (equicontinuous) を表示している). それぞれの問題に応じては，他の種々位相も重要性をもつであろうが，第2の方法によるもののうちで我々が考察するのは ε 位相に限定する.

射影的位相がどんな風に定義されるかの概略を述べよう. 目標とするところは，p と q をそれぞれ E および F 上の連続セミノルムとするとき，$p\otimes q$ で表わされる $E\otimes F$ 上のセミノルムを構成し，p および q が可能な限り動くときに得られるこれらの‘セミノルムのテンソル積’ $p\otimes q$ によって，位相 π を定義する. 任意のテンソル $\theta\in E\otimes F$ をとれば，一般には，θ は幾多の表現 $\sum_k x_k\otimes y_k$ (有限和，$x_k\in E$，$y_k\in F$) をもつ. この各表現に対して非負実数 $\sum_k p(x_k)q(y_k)$ を対応させる. $(p\otimes q)(\theta)$ の値は，これらの実数の下限として定義する. この定義は R. Schatten に依る.

位相 ε の定義は，テンソル積と線形写像 —— 或は双線形形式 —— の関係に基礎をおく. この関係は有限次元の場合には明らかなものである. $\dim E$ および $\dim F$ を有限とし，θ を $E\otimes F$ の元としよう. θ に対して次式による $E'\times F'$ 上の双線形形式を対応させよう.

$$(x', y')\mapsto\sum_k\langle x', x_k\rangle\langle y', y_k\rangle \tag{III. 1}$$

ここで $\sum_k x_k\otimes y_k$ は θ の任意の表現式とする (この双線形形式が θ の表現のえらび方に関係しないことは，テンソル積の定義から従う). また，θ に E' から F への線形写像を対応させることもできる. すなわち

$$x'\mapsto\sum_k\langle x', x_k\rangle y_k \tag{III. 2}$$

である. これらの対応が，$E\otimes F$，$B(E', F')$ ($E'\times F'$ 上の双線形形式全体のなす空間)，$L(E', F)$ (線形写像 $E'\to F$ 全体のなす空間) の間の同形写像になることを見るのは容易である. しかしながら，これらの便利な同形写像は，E と F の有限次元性の仮定をはずせば，も早や存在しないことは明らかである. 実際，(III. 2) の形の線形写像は有限次元の像をもたねばならない ((III. 2) の像は有限個のベクトル y_k で張られる F の線形部分空間に含まれる) ことがわかるからである. このことの他に，連続性に関係した問題も現れる. もちろん，そ

のときには，'位相的'双対 E'，すなわち E 上の連続線形汎関数の空間を利用することになる．このとき (III.2) は，$E\otimes F$ と E' から F への連続線形写像——ただし両方とも弱位相を入れたときの——のうち有限次元像をもつもの全体との間の1対1応用を与える．(III.1) が $E\otimes F$ と $B(E_\sigma', F_\sigma')$($E_\sigma'\times F_\sigma'$ 上のすべての連続双線形形式の空間) の間の1対1対応をあたえることは容易にわかる．後者の空間は，$E_\sigma\times F_\sigma'$ 上の分離連続双線形形式の空間 $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ に埋め込むことができる．この埋め込みのもつ利点は二つある．空間 $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ は自然な位相，すなわち同等連続集合の直積 $A'\times B'$ の上の一様収束の位相をもっている．そして，この位相を入れたとき，$\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ が完備となるための必要条件は，E と F が共に完備なことである．これらのことをすべて考慮に入れて，われわれは $E\otimes F$ を $B(E_\sigma', F_\sigma')$ ($E_\sigma'\times F_\sigma'$ 上の連続双線形形式の空間) と同一視する．これを $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ の線形部分空間と見なす．この埋め込みによる誘導位相が，ε 位相である．$E\otimes F$ にこの位相を入れたものの完備化は，その $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ での閉包と同一視される (ただし，E, F 共に完備であると仮定して)．さて，$\mathcal{C}^k\otimes E$ を E に値をもつ $\mathcal{C}^k$ 函数 (たとえば，$\mathbf{R}^n$ の或る開集合上で定義された) の空間 $\mathcal{C}^k(E)$ の線形部分空間とみたすとき，関数およびその次数 $\leqslant k$ の導関数の各コンパクト集合上の一様収束位相は，$\mathcal{C}^k\otimes E$ 上にちょうど ε 位相を誘導することは容易にわかる．さらに，$\mathcal{C}^k\otimes E$ は $\mathcal{C}^k(E)$ において稠密であるから，$\mathcal{C}^k(E)\cong\mathcal{C}^k\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ と書くことができる[1]．42, 43 の両章は，位相 π と ε の定義と基本的性質に当てられる (42章では，上述の空間 $B(E_\sigma', F_\sigma')$, $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ およびそれに関連した連続線形写像の空間を考察する)．44章では完備化 ε-テンソル積の二つの重要な例を挙げる．すなわち；コンパクト集合 K 上で定義され，Hausdorff かつ完備な局所凸空間 E に値をもつ連続関数の空間 $\mathcal{C}(K; E)\cong\mathcal{C}(K)\widehat{\otimes}_\varepsilon E$；$E$ に値をもつ点列 $\{x_k\}$ であって，級数 $\sum_k x_k$ が収束するもののなす空間 $l^1(E)\cong l^1\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ (ここでも，E は Hausdorff かつ完備)．45章はこの理論における最重要な結果の一つ，すなわち二つ

1)　E は完備であると仮定している．

の Fréchet 空間 E, F の完備化 π-積 $E\widehat{\otimes}_\pi F$ の元の，$E\widehat{\otimes}_\pi F$ において絶対収束する級数

$$\text{(III. 3)} \qquad \sum_k \lambda_k x_k \otimes y_k$$

による表現に当てる．ここで，$\sum_k|\lambda_k|<+\infty$ であり，$\{x_k\}$ および $\{y_k\}$ はそれぞれ E および F において 0 に収束する列である．この表現は，以後つねに利用される．46 章では，完備化 π-テンソル積のもう一つの例を挙げる．すなわち，完備 Hausdorff 局所凸空間に値をもつ可積分関数の空間 $L^1(E)\cong L^1\widehat{\otimes}_\pi E$ である．E が Banach 空間であれば，$L^1\widehat{\otimes}_\pi E$ はそのテンソル積ノルムをもつが，上の同形写像はそのとき等距離写像となる．

47 章では核型写像を，49 章では積分型写像を導入して考察する．E と F を Banach 空間として，級数 (III. 3) を $E\widehat{\otimes}_\pi F$ の元 θ の表現とすれば，明らかに θ は E' から F への一つの連続線形写像を定義する．すなわち

$$x'\mapsto\sum_k \lambda_k\langle x',\ x_k\rangle y_k$$

である．これは E' から F への典型的な核型写像である (E から F への核型写像を取り扱うときには，E と E' を入れ替えねばならない)．核型写像はコンパクトである (すなわち，E の単位球を F の相対コンパクト集合に写す)．核型写像に右からでも左からでも，連続線形写像を合成すれば，それは核型写像となる．Hilbert 空間の場合には，核型写像はちょうど，コンパクト作用素 u のうちでその絶対値写像 $(u^*u)^{1/2}$ の固有値の列 $\{\lambda_k\}$ が総和可能 (summable)，すなわち $\sum_k\lambda_k<+\infty$ となるものと一致する (定理 48. 2)．もちろん，E, F が Hilbert 空間の場合には，$E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ は E から F へのコンパクト作用素全体のなす空間と一致する (E と E' を同一視して考えて)．$E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ の双対は，核型作用素全体のなす空間 (ノルムはいわゆる ‘トレース・ノルム’，すなわちその作用素の絶対値 (作用素) の固有値の和である) と同一視できる．この後者の双対は，E から F へのすべての有界作用のなす空間 (ノルムは作用素ノルム) に他ならない (定理 48. 5′)．E と F が Banach 空間とは限らない局所凸空間の場合には，E 上の連続セミノルム p および F の有界閉凸平衡集合 B で F_B が完備なものに

自然に対応する Banch 空間 E_p および E_B を用いて核型作用素を定義する.

位相 π は位相 ε よりも細かい. したがって, $E\otimes F$ からそれ自身の上への恒等写像は, $E\hat{\otimes}_\pi F$ から $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ への連続線形写像に拡張できる. この拡張された写像は同形写像とは限らず, 或は単に全射とさえ限らないことが, Hilbert 空間の場合によって示される. しかしながら, その像は稠密である. したがって, その転置写像は, $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ の双対——それを $J(E, F)$ で表わす——から $E\hat{\otimes}_\pi F$ の双対への単射となる. 後者 ($E\hat{\otimes}_\pi F$ の双対) は, $E\times F$ 上の連続双線形形式の空間 $B(E, F)$ と同一視することができる. かくして, $J(E, F)$ の元は $E\times F$ 上の特殊な型の連続双線形形式となり, 積分型形式とよばれる. 作用素 $u: E\to F$ が積分型であるとは, それに付随する $E\times F'$ 上の双線形形式

$$(x, y')\mapsto\langle y', u(x)\rangle$$

が積分型であるときに言う. 核型作用素はすべて積分型であるが, E, F が Hilbert 空間でない場合には, 逆は一般には正しくない. しかしながら, 三つの積分型作用素の合成はつねに核型作用素である (実は二つの積分型作用素の合成でよいのだが——ここでは, それは証明しない). 典型的な積分型作用素の例は $\mathscr{C}(X)\times\mathscr{C}(X)$ 上の次の双線形形式

$$(f, g)\mapsto\int_X f(x)g(x)\,dx$$

であたえられる. ここで X はコンパクト空間, dx はその上の正 Radon 測度である (任意の積空間 $E\times F$ 上の積分型形式は——適当に X と dx をえらぶことによって——上のように表現できるのである). 以後の章のために大切なことは, 意任の積分型作用素 $E\to F$ が, Hilbert 空間 H を用いて $E\to H\to F$ のように, 二つの連続線形写像に分解できることである.

50 章からは, 核型空間にとりかかる. それは局所凸 Hausdorff 空間 E であって, 任意の他の空間 F に対して, $E\otimes F$ 上での位相 π と ε が一致するものである. 核型空間は多数存在する. 超関数の理論に現われる主な空間は核型である: $\mathscr{C}^\infty$, $\mathscr{C}_c^\infty$, $\mathscr{E}'$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{S}$ および $\mathscr{S}'$. その他に, $\mathbf{C}^n$ の開集合上の正則関数の空間 (およびその双対, すなわちその開集合上の解析的汎関数の空間) も核型

である．Banach 空間は，有限次元でない限り，核型ではない．完備な核型空間はそれが樽型ならば，Montel 空間であり，したがって回帰的である（定理 36 参照)．核型空間は強い‘安定性’をもっている．核型空間の線形部分空間，商空間，積空間，射影極限はすべて核型である．核型空間の可算位相直和，可算帰納極限も核型である．Fréchet 空間が核型になるのは，その強双対が核型のときそのときに限る．最も重要なことは，E の強双対 E' が核型空間のとき，E から F への連続線形写像の空間（有界収束位相を入れたもの）が，適当な条件のもとで，完備化テンソル積 $E' \hat{\otimes} F$ と同一視できることである．この事実から，L. Schwartz の核定理が容易に導かれる．この定理の述べるところは，二つの変数 x, y [1] の超関数 $K(x, y)$ と $(\mathscr{C}_c^\infty)_y$ から $\mathscr{D}_x'$ への連続線形写像の間に，1対1の対応が存在するということである．この対応は自然なものであって，次の公式による．

$$u \mapsto Ku, \qquad Ku(x) = \int K(x, y)u(y)\,dy.$$

この重要な定理の証明は，51 章で述べる．そこでは，超関数理論の主な諸空間が核型であることの証明もあたえる．核 $K(x, y)$ の偏微分方程式の分野における重要性は，超関数あるいは位相テンソル積の出現するずっと以前から認識されていた！ 空間 L^p，とくに L^2 における作用素との関連において，核に関する非常に深い徹底的な研究が行われて来たのである．本書の最終章である 52 章においては，核型空間（したがって Banach 空間ではない）およびそれまでの諸章の主結果を基礎にした線形偏微分方程式への幾つかの応用を述べる．

位相テンソル積および核型空間の理論は，A. Grothendieck に負う．われわれは彼の労作 (13) および L. Schwartz による解説 (14) に忠実に従ってきた．しかしながら，本書においては，これらの両書において議論されている多数の問題を省略した．更に詳しいことについては，読者はこれらの書物によっていただきたい．

---

1) x と y はそれぞれ $\mathbf{R}^n$ および $\mathbf{R}^m$ の開集合を動くとしてよい．

39.

ベクトル空間のテンソル積

いままでと同様，考察するベクトル空間はすべて複素数体 $\mathbf{C}$ 上のものとする．E, F を二つのベクトル空間とし，ϕ を $E\times F$ から第三のベクトル空間 M への双線形写像とする．

定義 39.1. E と F が **ϕ–線形無関連**（または，**ϕ–線形離別**）(ϕ–linearly disjoint) であるとは，次の条件の成り立つときに言う．

(LD) E の有限集合 $\{x_1,\ldots, x_r\}$ と F の有限集合 $\{y_1,\ldots, y_r\}$ の間に関係式

$$\sum_{j=1}^{r}\phi(x_j,\, y_j)=0$$

が成り立つとする．このとき，

もし $x_1,\ldots, x_r$ が一次独立ならば $y_1=\cdots=y_r=0$;

もし $y_1,\ldots, y_r$ が一次独立ならば $x_1=\cdots=x_r=0$

となる．

この定義を導入した意義は次の定義にある．

定義 39.2. ベクトル空間 M と，$E\times F$ から M への双線形写像 ϕ との対 (M, ϕ) が E と F の一つの**テンソル積** (tensor product) であるとは，次の二条件が満たされるときに言う．

(TP 1) $E\times F$ の ϕ による像は M 全体を張る．

(TP 2) E, F は ϕ–線形無関連である．

さて，任意の二つのベクトル空間のテンソル積の存在，同形を除いての一意性およびよく知られた**普遍性** (universal property) を証明しよう．その前に，ϕ-線形無関連性の同値な定義を述べておこう．

命題 39.1. E, F, M を三つのベクトル空間とし，ϕ を $E\times F$ から M への双線形写像とする．このとき，E と F が ϕ-線形無関連であるための必要十分条件は次の条件が成り立つことである．

(LD′) $\{x_j\}, \{y_k\}$ $(1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant k\leqslant s)$ をそれぞれ E および F の任意の一次独立な集合とするとき，集合 $\{\phi(x_j, y_k)\}$ は M において一次独立である．

証 明 (LD) ⇒ (LD′) の証． $\{x_j\}, \{y_k\}$ を (LD′) のようにして，$\sum_{j,k}\lambda_{jk}\phi(x_j, y_k)=0$ と仮定する．$z_j=\sum_k\lambda_{jk}y_k$ とおけば，$\sum_j\phi(x_j, z_j)=0$ を得るから，(LD) によって z_j はすべて 0 となる．$y_k(1\leqslant k\leqslant s)$ は一次独立だったから，これから係数 λ_{jk} がすべて 0 になることが出る．

(LD′) ⇒ (LD) の証． $\{x_1,\dots, x_r\}, \{y_1,\dots, y_r\}$ を (LD) におけるようにとり，$\{x_1, \dots, x_r\}$ を一次独立と仮定しよう．いま F において $y_1,\dots, y_r$ で張られる線形部分空間の一つの基底を $\{z_1,\dots, z_s\}$ として，$y_j=\sum_k\lambda_{jk}z_k$ とおく．

$\sum_j\phi(x_j, y_j)=0$ から $\sum_{j,k}\lambda_{jk}\phi(x_j, z_k)=0$ を得るから，(LD′) によってすべての $\lambda_{jk}=0$．これは y_j がすべて 0 であることを示している．(証終)

定理 39.1. E, F を二つのベクトル空間とする．

(a) E と F のテンソル積は存在する．

(b) (M, ϕ) を E と F の一つのテンソル積，G を任意のベクトル空間，b を $E\times F$ から G への任意の双線形写像とする．このとき，次の図式を可換にするような M から G への線形写像 $\tilde{b}$ が唯一つ存在する．

(39.1)
$$\begin{array}{ccc} E\times F & \xrightarrow{\ b\ } & G \\ \phi\downarrow & \nearrow \tilde{b} & \\ M & & \end{array}$$

(c)　(M_1, ϕ_1), (M_2, ϕ_2) を E と F の二つのテンソル積とすれば，M_1 から M_2 の上への 1 対 1 の線形写像 u であって次の図式を可換にするものが [唯一つ] 存在する．

(39.2)
$$\begin{array}{ccc} E\times F & \xrightarrow{\ \phi_2\ } & M_2 \\ \phi_1\downarrow & \nearrow u & \\ M_1 & & \end{array}$$

性質 (b) はしばしば '普遍性' とよばれる．(c) はテンソル積が同形を除いて一意的なことを，(a) はその存在を述べている．

(a) の証明　$E\times F$ 上の複素数値関数のうちで有限集合の外では 0 になるもの全体のなすベクトル空間を $\mathscr{X}$ と書く．(x, y) を $E\times F$ の一点とし，$e_{(x, y)}$ を点 (x, y) では 1 に等しく，他では 0 になる関数とする．(x, y) が $E\times F$ を動くとき，関数 $e_{(x, y)}$ の全体は $\mathscr{X}$ の一つの基底である．次の形の関数全体によって張られる $\mathscr{X}$ の線形部分空間を N とする．

(39.3)　$$e_{(\alpha x'+\beta x'',\, \gamma y'+\delta y'')}-\alpha\gamma e_{(x',y')}-\alpha\delta e_{(x',y'')}-\beta\gamma e_{(x'',y')}-\beta\delta e_{(x'',y'')}$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は複素数体 $\mathbf{C}$ の中をあらゆる仕方で動き，(x', y'), (x'', y'') は $E\times F$ の中をあらゆる仕方で動くとする．このとき，商空間 $\mathscr{X}/N$ を M とおき，$\mathscr{X}$ から M の上への標準写像を π として，$E\times F$ から M への写像 ϕ を

$$\phi(x, y) = \pi(e_{(x,y)})$$

によって定義する．N の定義によって，ϕ が双線形になることは明らかである．(M, ϕ) が E, F のテンソル積になることを見るには，E, F が ϕ-線形無関連であることを示しさえすればよい．

$\{x_1, \ldots, x_r\}$, $\{y_1, \ldots, y_s\}$ をそれぞれ E, F の一次独立な集合とする．複素 $\lambda_{jk}(1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant k \leqslant s)$ が

$$\sum_{j,k} \lambda_{jk}\phi(x_j, y_k) = 0$$

を満たすとする．これは，関数

$$f=\sum_{j,k}\lambda_{jk}e_{(x_j,y_k)}$$

が $\mathscr{X}$ の部分空間 N に属することと同値である．いま $\{x_\alpha\}$, $\{y_\beta\}$ $(\alpha\in A,\ \beta\in B)$ をそれぞれ $\{x_1,\dots,x_r\}$, $\{y_1,\dots,y_s\}$ を含むような E, F の基底とする．ただちにわかるように，(39.3)の形の関数したがって Nに属す任意の関数は

$$e_{(\Sigma_\alpha a_l{}^\alpha x_\alpha,\ \Sigma_\beta b_l{}^\beta y_\beta)}-\sum_{\alpha,\beta}a_l{}^\alpha b_l{}^\beta e_{(x_\alpha,y_\beta)} \tag{39.4}$$

の形の関数の一次結合として表わすことができる[1]．いうまでもなく，一次結合はすべて有限（一次結合）である．

(39.4) の関数を g_l と書けば，添字 l の有限集合が存在して，各 l について定数 c_l をえらんで

$$f=\sum_l c_lg_l$$

と書くことができる．ここで $(\sum_\alpha a_l{}^\alpha x_\alpha,\ \sum_\beta b_l{}^\beta y_\beta)$ は，どれも $(x_{\alpha_0},\ y_{\beta_0})$ $(\alpha_0\in A,\ \beta_0\in B)$ の形の対に等しくないと仮定してよい．なぜなら，もし等しいとするならば，$\alpha=\alpha_0$ のとき $a_l{}^\alpha=1$, $\alpha\neq\alpha_0$ なら $a_l{}^\alpha=0$, $\beta=\beta_0$ のとき $b_l{}^\beta=1$, $\beta\neq\beta_0$ なら $b_l{}^\beta=0$ となり，したがって g_l は恒等的に 0 となってしまうからである[2]．また，対 $(\sum_\alpha a_l{}^\alpha x_\alpha,\ \sum_\beta b_l{}^\beta y_\beta)$ はすべて相異なると仮定してよい．なぜなら，それらのうちの二つが相等しければ，それに対応する関数 g_l も等しくなるから，f を表わす和を整理し直して項の数を減らせばよいからである．ところで，これらの対がすべて相異なり，$(x_\alpha,\ y_\beta)$ の形の対とも異なるときには，関数 $e_{(x,y)}$ の一次独立性によって，すべての係数 c_l が 0 でなければならないことがただちにわかる．すなわち $f=0$．このとき，同じ理由によって，すべての係数 $\lambda_{j,k}$ もまた 0 に等しくなければならない．すなわち，条件 (LD)′ は満たされている（命題 39.1 をみよ）．（証終）．

---

1) (39.4) の形の関数全体が張る $\mathscr{X}$ の部分空間を N' とし，標準写像 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}/N'$ を π' とすれば，

$$(x,y)\mapsto\phi'(x,y)=\pi'(e_{(x,y)})$$

で定義される写像 $\phi':E\times F\to\mathscr{X}/N'$ は明らかに双線形になるから，π' は (39.3) の形の関数に対しては 0 となる．従って，N上で 0 となる．ゆえに $N\subseteq N'$.

2) そうなれば，その g_l は和から省いてよいから．

(b)の証明 G と b を (b) に述べたものとしよう．$\{x_\alpha\}$, $\{y_\beta\}$ $(\alpha\in A, \beta\in B)$ をそれぞれ E および F の基底とする．(α, β) が $A\times B$ を動くとき，$\phi(x_\alpha, y_\beta)$ が M の一つの基底になることがわかっているから，したがって M から G への線形写像 $\tilde{b}$ としては，すべての α, β について

$$\tilde{b}(\phi(x_\alpha, x_\beta)) = b(x_\alpha, y_\beta)$$

とおくことによって (唯一つ) 存在することになる[1]．

(c)の証明 $(M_i, \phi_i)(i=1,2)$ を E と F の二つのテンソル積としよう．図式 (39.1) を，$M=M_1$, $G=M_2$, $\phi=\phi_1$, $b=\phi_2$ として適用すれば，((39.1) における $\tilde{b}$ に相当する) 線形写像 $u: M_1\to M_2$ が存在する．このことをもう一度，(M_1, ϕ_1), (M_2, ϕ_2) の役割を交換してやれば，線形写像 $v: M_2\to M_1$ が得られる．u と v は互に他の逆写像であることを容易にわかるから[2]，これらは同形写像である．(証終)

われわれにとって今後，定理 39.1 (a) の証明において構成したテンソル積を使うことはない．二つの空間のテンソル積が入用なときは，いつでもその‘具体的実現’の存在する場合である．定着している習慣に従って，われわれが用いる E と F のテンソル積を $E\otimes F$ と書き，$E\times F$ から $E\otimes F$ への標準写像 ϕ を，記号 ϕ を用いるよりも，

$$(x, y)\mapsto x\otimes y$$

によって示すことが多い．

命題 39.2. E, F, E_1, F_1 を複素数体上の四つのベクトル空間とする，$u: E\to E_1$, $v: F\to F_1$ を線形写像とする．このとき，次の関係式を満たすような，$E\otimes F$ から $E_1\otimes F_1$ への線形写像が唯一つ存在する．それを u と v のテンソル積とよび $u\otimes v$ で表わす．

$$u\otimes v(x\otimes y) = u(x)\otimes v(y) \quad (\text{すべての } x\in E,\ y\in F \text{ について}).$$

---

1) 線形写像は基底の上ではその値を自由に指示して唯一つきまることに注意せよ．

2) それには，$v\circ u$ および $u\circ v$ がそれぞれ M_1 および M_2 の上の恒等写像であることを示せばよい．

証　明　$(x, y) \mapsto u(x) \otimes v(y)$ は $E \times F$ から $E_1 \otimes F_1$ への双線形写像であるから，定理 39.1(b) によって $E \otimes F$ から $E_1 \otimes F_1$ への線形写像が一意的に決まる．それが $u \otimes v$ である．（証終）

例 I. 有限次元ベクトル空間の場合

$E = \mathbf{C}^m$, $F = \mathbf{C}^n$ (m, n : 正整数) とする．このとき $\mathbf{C}^{mn}$ は E と F の一つのテンソル 積である．$E \times F$ から $\mathbf{C}^{mn}$ への標準的双線形写像は

$$((x_j), (y_k))_{1 \leqq j \leqq m, 1 \leqq k \leqq n} \mapsto (x_j y_k)_{1 \leqq j \leqq m, 1 \leqq k \leqq m}$$

とする[1]．

例 II. 関数のテンソル積

X, Y を二つの集合とし，f と g をそれぞれ X および Y の上で定義された複素数値関数とする．このとき，$f \otimes g$ によって，$X \times Y$ で定義された関数

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

を表わすことにしよう．さて，E および F をそれぞれ X および Y の上で定義された複素数値関数からなる任意の線形空間とする．$X \times Y$ 上で定義されたすべての複素数値関数のなする空間において，$f \otimes g$ の形の元（f は E の中を動き，g は F の中を動く）によって張られる線形部分空間を $E \otimes F$ によって表わそう．$E \otimes F$ が E と F の一つのテンソル積になることは，ただちにわかる．

いま，X, Y 共に位相が入っているとしよう．一つの関数が $\neq 0$ となる点のなす集合の閉包を，その関数の台とよぶことを思い出そう．直ぐに検証できるように，

$$\mathrm{supp}(f \otimes g) = (\mathrm{supp}\, f) \times (\mathrm{supp}\, g)$$

が成り立つ．

例 II の特別の場合をいくつか，手取り速く考察して見よう．

例 II. a. 台が有限（集合）である関数

E および F を，それぞれ X および Y において定義された複素関数であって，有限集合の外では 0 になるもののなすベクトル空間とする．このとき，$E \otimes Y$

1)　このとき，定義 39.1 の (TP1), (TP2) を検証して見るとよい．

は，$X \times Y$ 上の複素関数であって，この積空間の有限集合の外では 0 になるもののなす空間になることが，ただちにわかる．

$\mathbf{N}$ を非負整数全体のなす集合とし，$X = \mathbf{N}^m$, $Y = \mathbf{N}^n$ (m, n : 正整数) としよう．X (或は Y) 上で有限な台をもつ複素関数の空間 E (或は F) は，m 個 (或は n 個) の不定元の多項式全体の空間 $\mathcal{P}_m$ (或は $\mathcal{P}_n$) と同一視できる．$f \in E$ に対しては，多項式 $P_f(x) = \sum_{p \in \mathbf{N}^m} f(p) x^p$ を対応させ，$g \in F$ に対しても同様にする．このようにすれば，最初に述べたことによって，テンソル積 $\mathcal{P}_m \otimes \mathcal{P}_n$ は標準的に $\mathcal{P}_{m+n}$ に同形である．

例 II. b. 形式的巾級数，整関数，解析的汎関数．

$\mathcal{Q}_m$, $\mathcal{Q}_n$ をそれぞれ m および n 不定元の (複素数係数の) 形式的巾級数の空間とする．各巾級数 $u(x) = \sum_{p \in \mathbf{N}^m} u_p x^p$ に対して，$\mathbf{N}^m$ 上で定義された複素数値関数 $p \mapsto u_p$ を対応させよう．これは，$\mathcal{Q}_m$ から $\mathbf{N}^m$ 上のすべての複素数値関数 (もちろん，m 個の添字の複素数列といってもよい) の空間の上への同形写像である．このとき，テンソル積 $\mathcal{Q}_m \otimes \mathcal{Q}_n$ は $\mathcal{Q}_{m+n}$ の線形部分空間に標準的に同形である．ところで，この線形部分空間は，決して $\mathcal{Q}_{m+n}$ には一致しない．このことは，$m+n$ 不完元 $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ の形式的巾級数 $u(x, y)$ は，一般には，$x = (x_1, \ldots, x_m)$ の形式的巾級数と $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の形式的巾級数の積の有限和

$$\sum_{j=1}^{J} u_j(x) v_j(y)$$

としては書けないこと[1] を意味しているに過ぎない．ところで，もし $\mathcal{Q}_{m+n}$ に

1) このことを示すには，$m = n = 1$ のときに示せば十分であることは容易にわかる (x_1, y_1 にしか関係しない項だけ見ればよいから)．そこで，$m = n = 1 (x = x_1, y = y_1)$ として，$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$ が $\sum_{j=1}^{J} u_j(x) v_j(y)$ の形にならないことを示せばよい．いま書けると仮定して，$x^p y^q$ ($p \leqslant J$, $q \leqslant J$) の係数を比較すれば，次の関係を得る．$u_j(x) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p^{(j)} x^p$, $v_j(y) = \sum_{q=0}^{\infty} v_q^{(j)} y^q$ とおいて，行列 U, V を

$U_J = (u_d^{(j)})_{1 \leqslant j \leqslant J, 0 \leqslant p \leqslant J}$, $V_J = (v_q^{(j)})_{1 \leqslant j \leqslant J, 0 \leqslant q \leqslant J}$, ($j$が行の番号；$p+1$, $q+1$ が列の番号)

とおけば，U_J, V_J 共に $J \times (J+1)$ 行列であって，${}^t U_J V_J = (J+1)$ 次の単位行列でなければならない．ここで U_J および V_J の第 $J+1$ 列を $(0, \ldots, 0)$ で補充したものを $\tilde{U}_J$, $\tilde{V}_J$ としても，明らかに ${}^t \tilde{U} \tilde{V} = (J+1)$ 次の単位行列，を得るが，両辺の行列式を取れば，$0=1$ となって矛盾である．

係数の単純収束の位相 (10章例 III) を入れて考えるならば，$\mathcal{Q}_m \otimes \mathcal{Q}_n$ は $\mathcal{Q}_{m+n}$ において稠密なことに注意しておこう．実際，$\mathcal{P}_{m+n}$ が $\mathcal{Q}_{m+1}$ において稠密なことは明白である．他方，上に見たように，$\mathcal{P}_{m+n} = \mathcal{P}_m \otimes \mathcal{P}_m$ であるが，これは明らかに $\mathcal{Q}_m \otimes \mathcal{Q}_n$ に含まれているからである．

m 次元複素空間 $\mathbf{C}^m$ 上の整解析関数の空間 $H(\mathbf{C}^m)$ は，$\mathcal{Q}_m$ の線形部分空間と同一視することができる．それは丁度，収束半径が無限大の収束巾級数のなす部分空間である．このとき $H(\mathbf{C}^m) \otimes H(\mathbf{C}^n)$ は $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$ 上の関数であるが，収束半径が無限大の巾級数からなるものとして，$\mathcal{Q}_m \otimes \mathcal{Q}_n$ の部分空間と同一視することができる．もちろん，$H(\mathbf{C}^m) \otimes H(\mathbf{C}^n) \subseteq H(\mathbf{C}^{m+n})$ である．実際は，$H(\mathbf{C}^m) \otimes H(\mathbf{C}^n)$ は $H(\mathbf{C}^{m+n})$ の稠密な真の[1]部分空間である．なぜなら，$H(\mathbf{C}^m) \otimes H(\mathbf{C}^n)$ は $(m+n)$ (複素) 変数の多項式の空間を含んでおり，それが $\mathbf{C}^{m+n}$ 上の整関数の空間において稠密 (定理 15.1) だからである．

また，$\mathbf{C}^m$ 上の指数型の整関数の空間 $\mathrm{Exp}(\mathbf{C}^m)$ (記号 22.2 参照) を考えてもよい．すぐにわかるように

$$\mathrm{Exp}(\mathbf{C}^m) \otimes \mathrm{Exp}(\mathbf{C}^n)$$

は $\mathrm{Exp}(\mathbf{C}^{m+n})$ の線形部分空間である[2]．μ および ν を，それぞれ $\mathbf{C}^m$ および $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数とすれば，その Fourier–Borel 変換 $\hat{\mu}$ および $\hat{\nu}$ は，それぞれ $\mathrm{Exp}(\mathbf{C}^m)$ および $\mathrm{Exp}(\mathbf{C}^n)$ に属する (定義 22.3, 定理 22.3)．このとき，テンソル積 $\hat{\mu} \otimes \hat{\nu}$ は $\mathbf{C}^{m+n}$ 上の一つの解析的汎関数の Fourier–Borel 変換となるが，その解析的汎関数を $\mu \otimes \nu$ で示し，μ と ν のテンソル積とよぶ．後に，テンソル積 $\mu \otimes \nu$ は，Fourier–Borel 変換を利用しないで定義できることがわかるであろう．

例 II.c. ユークリッド空間の開集合上の関数空間．

X および Y をそれぞれ $\mathbf{R}^m$ および $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．k, l を二つの非負整数または無限大としよう．このとき，テンソル積

1) 前頁脚注の $u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$ の代りに，$e^{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k}{k!}$ を考えるとよい．議論は前脚注と同様である．

2) この場合も，前脚注および前頁脚注と同様のことを考えて見よ．

$$\mathcal{E}^k(X)\otimes\mathcal{E}^l(Y), \quad \mathcal{E}_c{}^k(X)\otimes\mathcal{E}_c{}^k(Y) \quad \text{など}$$

を構成することができる．これらは，$\mathbf{R}^{m+n}$ の開集合 $X\times Y$ 上で定義された関数の空間である．実際，これらは，$\mathcal{E}^{k,l}(X\times Y)$ の線形部分空間である．この記号の意味は明らかであろう[1]．たとえば，$\mathcal{E}_c{}^k(X)\otimes\mathcal{E}^l(Y)$ に属する関数は，その台の X への射影がコンパクトであるなど．

15 章に述べた近似に関する結果から，次のことは容易に出る．

定理 39.2. X および Y をそれぞれ $\mathbf{R}^m$ および $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき，

$$\mathcal{E}_c{}^\infty(X)\otimes\mathcal{E}_c{}^\infty(Y)$$

は，$\mathcal{E}_c{}^\infty(X\times Y)$ において列的に稠密である．

証　明　$\phi\in\mathcal{E}_c{}^\infty(X\times Y)$ としよう．補題 15.1 の系 2 により，$\mathcal{E}^\infty(X\times Y)$ において ϕ は多項式列 $\{P_k(x, y)\}$ $(k=1, 2,\ldots)$ の極限になる．$K=\operatorname{supp}\phi$ の X および Y への射影をそれぞれ K_1 および K_2 としよう．K_1, K_2 は共にコンパクト集合である．そこで，$g\in\mathcal{E}_c{}^\infty(X)$, $h\in\mathcal{E}_c{}^\infty(Y)$ をそれぞれ K_1 および K_2 の近傍で 1 に等しい関数とする．このとき，$g\otimes h$ は K の近傍で恒等的に 1 に等しくかつ $\mathcal{E}_c{}^\infty(X)\otimes\mathcal{E}_c{}^\infty(Y)$ に属する関数となる．したがって，このテンソル積空間は関数列

$$(g\otimes h)P_k, \qquad k=1, 2,\ldots$$

を含むが，この列は $\mathcal{E}^\infty(X\times Y)$ において $(g\otimes h)\phi=\phi$ に収束する．ところで，その台はつねに $X\times Y$ の一定のコンパクト集合に含まれているから，$\mathcal{E}_c{}^\infty(X\times Y)$ においても ϕ に収束する．(証終)

系 1. $\mathcal{E}_c{}^\infty(X)\otimes\mathcal{E}_c{}^\infty(Y)$ は，$\mathcal{E}_c^{k,l}(X\times Y)$, $\mathcal{E}^{k,l}(X, Y)$, $L^p(X\times Y)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ の各空間において列的に稠密である．

証明には，定理 39.2 と定理 15.4 の系 1, 2, 3 (ただし $\Omega=X\times Y$ とする) を

1)　すなわち，$X\times Y$ 上の関数 $u(x, y)$ であって，$(\partial/\partial x)^\alpha(\partial/\partial y)^\beta u$ が $|\alpha|\leqslant k$, $|\beta|\leqslant l$ のとき連続なもの全体の空間．

組合せるとよい.

系 2. $\mathcal{C}_c{}^k(X)\otimes\mathcal{C}_c{}^l(Y)$ は，$\mathcal{C}_c^{k,l}(X\times Y)$ および $\mathcal{C}^{k,l}(X,Y)$ において列的に稠密である.

系 3. $L^p(X)\otimes L^p(Y)$ は $L^p(X\times Y)$ において稠密である. $(1\leqslant p<+\infty)$

同様の結果をいろいろ述べて証明することは容易であろう.

演 習 問 題

39.1. (M,ϕ) を E と F のテンソル積, (N,φ) を F と E のテンソル積とする. このとき, (M,ϕ) から (N,φ) の上への (テンソル積構造に関する) 同形写像 J が存在することを証明せよ. また, 次の図式を可換にする写像 S は何か?

$$\begin{array}{ccc} E\times F & \xrightarrow{\ S\ } & F\times E \\ \phi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ M & \xrightarrow{\ \ J\ \ } & N \end{array}$$

39.2. E,F を $\mathbf{C}$ 上の二つのベクトル空間とし, $\{e_\alpha\}$, $\{f_\beta\}$ $(\alpha\in A,\ \beta\in B)$ をそれぞれ E および F の基底とする. $E\otimes F$ を E と F のテンソル積とする. このとき $\{e_\alpha\otimes e_\beta\}$ $(\alpha\in A,\ \beta\in B)$ は, $E\otimes F$ の基底となることを証明せよ.

39.3. E_j, F_j $(j=1,2)$ を四つのベクトル空間とし, $u_j: E_j\to F_j$ $(j=1,2)$ を線形写像とする. また, $\{e_{\alpha,j}\}$, $\{f_{\beta,j}\}$ $(\alpha\in A_j,\ \beta\in B_j)$ をそれぞれ E_j および F_j の基底とする $(j=1,2)$. $(c_{\alpha,j}^{\beta})$ をこれらの基底に関する u_j の行列とする $(j=1,2)$. このとき, $E_1\otimes E_2$ の基底 $\{e_{\alpha,1}\otimes e_{\alpha',2}\}$ と $F_1\otimes F_2$ の基底 $\{f_{\beta,1}\otimes f_{\beta',2}\}$ に関する, テンソル積 $u_1\otimes u_2$ の行列はどのようなものか?

39.4. E_j, F_j, u_j $(j=1,2)$ を演習問題 39.3 の通りとする. このとき, 写像 $u_1\otimes u_2$ の核 (或いは, 像) はどうなるか? u_1, u_2 が共に 1 対 1 の (或いは, 上への) 写像であるとき, $u_1\otimes u_2$ もまた 1 対 1 の (或いは, 上への) 写像になることを導け.

39.5. E, F, M を三つのベクトル空間とし, ϕ を $E\times F$ から M への双線形写像とす

る．このとき，次の二性質は同値であることを証明せよ．

(a) (M, ϕ) は E と F のテンソル積である．

(b) 写像

$$x^* \mapsto x^* \circ \phi$$

は M の代数的双対 M^* から $E \times F$ 上の双線形形式全体の空間 $\mathfrak{B}(E, F)$ の上への同形写像である．

40.

位相ベクトル空間に値をもつ可微分関数，超関数のテンソル積

X と Y を，それぞれ $\mathbf{R}^m$ および $\mathbf{R}^n$ の開集合とする (m, n : 整数 $\geqslant 1$)．二つの変数 $x \in X, y \in Y$ の関数 $\phi(x, y)$ を，そのうちの一つの変数，たとえば y の関数と見なし，その代りに，値は残りの変数 x の関数空間にとると見なすことは，種々の場合に便利なことがある．或は，もっと一般に，Y で定義され，値を一つの位相ベクトル空間 E の中にもつ関数を取り扱いたいことがある．E が X 上（単に関数の空間でなくて）超関数の空間の場合もある，これらのことが TVS E に値をもつ可微分関数の概念を導入する理由であり，これらの関数の空間およびその双対を考察する理由でもある．そうして，結局は，E に値をとる超関数の理論も必要となる．

この章では，先ず，開集合 Y で定義され，TVS E に値をとる可微分関数の定義を復習し，Y で定義され E に値をもつ k 回可微分関数の空間 $\mathcal{E}^k(Y; E)$ および $\mathcal{E}_c{}^k(Y; E)$（それぞれ，任意の台をもつもの，およびコンパクトな台をもつもの）を導入する．これらの空間は自然な $\mathcal{E}^k$ 位相を入れることができる．それはスカラー値の場合の安直な一般化である．

このようにして導入された概念と事実を用いて，X 上の超関数 S と Y 上の超関数 T のテンソル積を定義する．TVS に値をとる関数を用いる仕方は，テンソル積 $S \otimes T$ の定義の基礎となる一般的事実を解明するのに随分役立つのである（とくに，超関数に対する，いわゆる Fubini の定理：定理 40.3 を見よ）．

f を開集合 $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ から TVS E への写像とする．"f が Y の 1 点 y^0 において微分可能である" ということの意味を思い出そう（定理 27.1 に続く注意

参照)．

定義 40.1. 関数fが$y^0\in Y$において**微分可能** (differntiable) であるとは，Eのn個のベクトル$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$が存在して，数$|y-y^0|>0$が0に収束するとき，

$$|y-y^0|^{-1}\left\{f(y)-f(y^0)-\sum_{j=1}^{n}(y_i-y_i^0)\mathbf{e}_j\right\}$$

がEにおいて0に収束するときに言う．このとき，ベクトル$\mathbf{e}_j$を，fの点y^0における一階偏導関数とよび，

$$\mathbf{e}_j=\frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0), (j=1, 2, \dots, n)$$

と書く．

fがy^0で微分可能ならば，fは明らかにその点で連続である．伝統的な術語は，TVSに値をとる関数の場合にも拡張する．fが集合$A\subseteq Y$において微分可能とは，Aの各点において微分可能なことをいう．fが連続的微分可能とは，それがすべての点において微分可能であって，その一階偏導関数がすべて連続関数になることをいう．fがk回連続的微分可能である（或は$\mathscr{C}^k$である）とは，fがすべての点で微分可能であって，その一階偏導関数がすべて$\mathscr{C}^{k-1}$になることをいう．fが無限回微分可能とは，それがすべての$k=0, 1, \dots$について$\mathscr{C}^k$であることをいう．等々．

記号 40.1. $\mathscr{C}^k(Y; E)$によって，YからEへの$\mathscr{C}^k$写像全体のなす空間を表わす．$(0\leqslant k\leqslant+\infty)$．$\mathscr{C}_c^k(Y; E)$によって，コンパクトな台をもつ関数からなる$\mathscr{C}^k(Y; E)$の部分空間を表わす．

ベクトル値関数の台とは，その関数が0でない点の集合の閉包のことを言う[1)]．

定義 40.2. $\mathscr{C}^k(Y, E)$上の$\mathscr{C}^k$**位相** ($\mathscr{C}^k$topology) とは，関数およびその回数

1) その関数が連続なときに用いる定義である．不連続関数に対しては，この定義は安直すぎる．

$<k+1$ の導関数の，Y の各コンパクト集合上の一様収束の位相を言う．

$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \cdots \subseteq \Omega_j \subseteq \cdots$ を Y の相対コンパクト開集合の列であって，その合併が Y に等しいもの，l を任意の整数 $<k+1$ とし，$\{U_\alpha\}$ を E における 0 の近傍基底とする．j, l, α があらゆる可能な仕方で動くとき，$\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ の部分集合

$$\mathcal{U}_{j,l,\alpha} = \{f\,;\ \text{すべての } y \in \Omega_j \text{ とすべての } q \in \mathbf{N}^n, |q| \leqslant l \text{ について，}$$
$$(\partial/\partial y)^q f(y) \in U_\alpha\}$$

は，$\mathcal{E}^k$ 位相に関する 0 の近傍基底を形成する．E が距離付け可能ならば，$\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ もそうであり；E が距離付け可能で完備ならば，$\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ もそうなる．U_α が凸集合のときには ${}_{j,l,\alpha}\mathcal{U}$ も凸集合になることに注意するならば，E が局所凸のときにはつねに $\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ も局所凸になることがわかる．言うまでもあるまいが，$\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ が Hausdorff になるのは，E がそうであるときそのときに限る．

E が局所凸のとき，$\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ の連続セミノルム基底を得るのは容易である．それには，E の連続セミノルム基底 $\{\mathfrak{p}_\kappa\}$ を一つえらんで，$\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ のセミノルム

$$f \mapsto \mathcal{P}_{j,l,\kappa}(f) = \sup_{y \in \Omega j}\left(\sum_{|q| \leqslant l}(\mathfrak{p}_\kappa((\partial/\partial y)^q f(y))\right)$$

を考えればよい．j, l, κ があらゆる可能な仕方で動くとき，$\mathcal{P}_{j,l,\kappa}$ は位相 $\mathcal{E}^k$ に関する連続セミノルム基底を成す．

Y の任意のコンパクト集合 K があたえられたとき，$\mathcal{E}_c^k(K\,;E)$ によって，台が K に含まれる関数全体から成る $\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ の部分空間を表わす．空間 $\mathcal{E}_c^k(K\,;E)$ には $\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ からの誘導位相を入れる．今後，E は局所凸であることをつねに仮定して進むことにしよう．空間 $\mathcal{E}_c^k(Y\,;E)$ には，K が Y のあらゆるコンパクト集合を動くときの，空間族 $\mathcal{E}_c^k(K\,;E)$ の帰納極限位相を入れる．すなわち，$\mathcal{E}_c^k(Y\,;E)$ の凸集合が 0 の近傍になるのは，各部分空間 $\mathcal{E}_c^k(K\,;E)$ とその凸集合との共通部分が $\mathcal{E}_c^k(K\,;E)$ における 0 の近傍となるときである．$\mathcal{E}_c^k(Y\,;E)$ の位相の定義は，その組立ての基礎となる部分空間 $\mathcal{E}_c^k(K\,;E)$ が

(一般には) Fréchet 空間でないということを除けば，LF 空間の位相の定義の繰返しである．ところで，$K \subseteq K'$ を Y の二つのコンパクト集合とするとき，$\mathcal{C}_c^k(K'; E)$ から $\mathcal{C}_c^k(K; E)$ に誘導した位相は $\mathcal{C}_c^k(K; E)$ のもとの位相，すなわち $\mathcal{C}^k(Y; E)$ からの誘導位相に一致することに注意しよう．また，$\mathcal{C}_c^k(Y; E)$ の位相は，その部分空間の列 $\mathcal{C}_c^k(K_j; E)$ の帰納極限として定義できることに注意する．このためには，Y のコンパクト集合の列で，その合併が Y に等しいものを任意にとればよい (たとえば，$K_j = \bar{\Omega}_j$ とすればよい；ここで Ω_j は，定義 40.2 につづいて述べた Y の相対コンパクト開集合列である)．このとき，容易にわかるように，$\mathcal{C}_c^k(Y; E)$ は各 $\mathcal{C}_c^k(K; E)$ 上にもとの位相を誘導する (補題 13.1 参照)． 13 章で証明した LF-空間の性質と同様にして，次のことがわかる．

命題 40.1. Y を $\mathbf{R}^n$ の開集合，E を局所凸 Hausdorff 空間，k を整数 $\geqslant 0$ または無限大とする．

このとき，$\mathcal{C}_c^k(Y; E)$ から局所凸 TVS F への線形写像 u が連続になるための必要十分条件は，u の各部分空間 $\mathcal{C}_c^k(K; E)$(K: Y のコンパクト集合) への制限が連続になることである．

系 $\mathcal{C}_c^k(Y; E)$ 上の線形汎関数が連続になるための必要十分条件は，その各部分空間 $\mathcal{C}_c^k(K; E)$ への制限が連続なことである．

証 明 それには，命題 13.1 およびその系の証明において，定義列 $\{E_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) が Fréchet 空間であるという事実を，どこにも利用していないということに注意すれば十分である (演習問題 13.6 参照)!

例 40.1. 値空間 E が有限次元 (かつ Hausdorff) の場合．$d = \dim E$ を有限として，$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ を E の基底とし，$\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_d'$ を E' の双対基底とする (この意味は，$i \neq j$ ならば $\langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j \rangle = 0$, $i = j$ ならば $\langle \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_j \rangle = 1$)．関数 $f \in \mathcal{C}^k(Y; E)$ を考えよう．任意の $y \in Y$ に対して

$$f(y)=\sum_{j=1}^{n}f_j(y)\mathbf{e}_j$$

と書けば，

$$f_j(y)=\langle \mathbf{e}_j', f(y)\rangle$$

を得る．ただちにわかるように（定理27.1参照），f_j は $\mathcal{C}^k(Y)$ に属する複素数値関数である．逆に，f をそのような複素数値関数とし，$\mathbf{e}$ を E に属するベクトルとする．このとき，$f\otimes\mathbf{e}$ によって，Y で定義され E に値をもつ関数 $y\mapsto f(y)\mathbf{e}$ を表わすことにする．上に述べたことは，f が $\mathcal{C}^k(Y)$ を動き，$\mathbf{e}$ が E の中を動くときに，$f\otimes\mathbf{e}$ の形の関数が $\mathcal{C}^k(Y;E)$ を張るということである．このことが成り立つのは，E が有限次元のときに限る．このとき，$\mathcal{C}^k(Y)\times E$ から $\mathcal{C}^k(Y;E)$ への双線形写像 $(f,\mathbf{e})\mapsto f\otimes\mathbf{e}$ によって，$\mathcal{C}^k(Y;E)$ は $\mathcal{C}^k(Y)$ と E のテンソル積となる．

さて，一般の場合（$\dim E$ が有限とは限らない場合）にもどろう．

記号 40.2. E を複素数体上のベクトル空間，f を $Y\subseteq\mathbf{R}^n$ 上で定義された複素数値関数，$\mathbf{e}$ を E に属するベクトルとする．このとき，$f\otimes\mathbf{e}$ によって，Y で定義され E に値をもつ関数 $y\mapsto f(y)\mathbf{e}$ を表わすことにする．

命題 40.2. E を Hausdorff TVS とする．双線形写像

$$(f,\mathbf{e})\mapsto f\otimes\mathbf{e}$$

は $\mathcal{C}^k(Y)\times E$ を，その像が E の有限次元部分空間に含まれるような関数全体から成る $\mathcal{C}^k(Y;E)$ の部分空間の中へ写すが，この部分空間は上の双線形写像に関して，$\mathcal{C}^k(Y)$ と E のテンソル積となる（この部分空間を $\mathcal{C}^k(Y)\otimes E$ によって示すことにする）．

証　明　$f\otimes\mathbf{e}$ の形の関数については，その像が E の有限次元（実は一次元）部分空間に含まれていることは自明である．逆に，f を Y から E への $\mathcal{C}^k$ 写像であって，その像が E の部分空間 E_0 に含まれ，$d=\dim E_0$ が有限であるとしよう．$\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d$ を E_0 の一つの基底とすれば，$f=f_1\otimes\mathbf{e}_1+\cdots+f_d\otimes\mathbf{e}_d$,

$f_j \in \mathcal{E}^k(Y)$ と書くことができる（上述の例 40.1 参照）．このことから，f は，$f \otimes \mathbf{e}$ の形の関数によって張られる $\mathcal{E}^k(Y\,;E)$ の部分空間に属することがわかる．これによって，命題は容易に出る．（証終）．

$\mathcal{E}_c{}^k(Y) \otimes E$ によって，コンパクトな台をもつ関数からなる $\mathcal{E}^k(Y) \otimes E$ の部分空間を表わす．もちろん $\mathcal{E}_c{}^k(Y) \otimes E$ は $\mathcal{E}_c{}^k(Y)$ と E のテンソル積となる．

定理 40.1. X, Y をそれぞれ $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ の開集合とする．このとき，写像

$$\phi \mapsto (y \mapsto (x \mapsto \phi(x, y))) \tag{40.1}$$

は，位相ベクトル空間構造に関して，

$$\mathcal{E}^\infty(X \times Y) \text{ から } \mathcal{E}^\infty(Y\,;\mathcal{E}^\infty(X)) \text{ の上への}$$

同形写像となる．

証　明　写像 (40.1) が 1 対 1 の連続線形写像であることは，その定義からただちに出る．他方，f を $\mathcal{E}^\infty(Y\,;E)$ の元として，$E = \mathcal{E}^\infty(X)$ とすれば，各 $y \in Y$ に対して $f(y)$ は X 上の関数である．点 x における $f(y)$ の値を $\phi(x, y)$ と書くならば，ただちにわかるように，$\phi \in \mathcal{E}^\infty(X \times Y)$ であり，(40.1) による ϕ の像が f となる．写像 $f \mapsto \phi$ の連続性は定義から明らかである（或は，$\mathcal{E}^\infty(X \times Y)$ と $\mathcal{E}^\infty(Y\,;\mathcal{E}^\infty(X))$ が共に Fréchet 空間であるから，開写像定理を用いてもよい；定理 17.1 の系参照）．

系 1. (40.1) の $\mathcal{E}_c{}^\infty(X \times Y)$ への制限は，この空間から $\mathcal{E}_c{}^\infty(Y\,;\mathcal{E}_c{}^\infty(X))$ の上への同形写像である，

証　明　$\mathcal{E}_c{}^\infty(Y\,;\mathcal{E}_c{}^\infty(X))$ の位相の定義と命題 40.1 によれば，(40.1) の制限が 1 対 1 の連続線形写像になることはただちにわかる．逆に，$f \in \mathcal{E}_c{}^\infty(Y\,;\mathcal{E}_c{}^\infty(X))$ とすれば，f の台は Y の一つのコンパクト集合 K となる．したがって，K の f による像は，$\mathcal{E}_c{}^\infty(X)$ のコンパクト集合となる．ところで，$\mathcal{E}_c{}^\infty(X)$ のコンパクト集合は，必然的に，$\mathcal{E}_c{}^\infty(H)$ の形の部分空間に含まれる（ここで，H は X のコンパクト集合；命題 14.6）．これは，f の (40.1) による逆像となる $(x,$

y) の $\mathscr{E}^\infty$ 関数の台が $H\times K$ に含まれる．ということを意味している．したがって，(40.1) の $\mathscr{E}_c^\infty(X\times Y)$ への制限は，この空間を $\mathscr{E}_c^\infty(Y;\mathscr{E}_c^\infty(X))$ の上に写していることがわかる．逆写像の連続性を証明するための最短路は，多分，$\mathscr{E}_c^\infty(Y;\mathscr{E}_c^\infty(X))$ が Fréchet 空間族 $\mathscr{E}_c^\infty(K;\mathscr{E}_c^\infty(H))$($H$, K はそれぞれ X および Y のコンパクト集合) の帰納極限になっていることを用いる仕方であろう．そうして，LF-空間からもう一つの LF-空間の上への1対1連続線形写像は同形写像 (すなわち，両連続) になるという事実を利用するか，或いは (40.1) が $\mathscr{E}_c^\infty(H\times K)$ から $\mathscr{E}_c^\infty(K;\mathscr{E}_c^\infty(H))$ の上への同形写像を誘導することを利用すればよい．(証終)．

さて，一般の場合にもどって，定理 27.1 を強めた形の定理を述べよう．

定理 40.2. E を局所凸 Hausdorff 空間とし，Y を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．このとき，E 上の任意の連続線形形式 e' に対して，

$$f\mapsto(y\mapsto\langle e',f(y)\rangle)$$

は，$\mathscr{E}^\infty(Y;E)$(或は $\mathscr{E}_c^\infty(Y;E)$) から $\mathscr{E}^\infty(Y)$(或は $C_c^\infty(Y)$) への連続線形写像である．

この定理の証明は全く安直であって，定義に従って進めばできる．そこで証明は省略することにして，今まで述べて来たことの割合に重要な応用を述べよう．今までと同様に，X と Y をそれぞれ $\mathbf{R}^m$ と $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．

定理 40.3. S を X 上の超関数とする．このとき，

$$\phi\mapsto(y\mapsto\langle S_x,\phi(x,y)\rangle)$$

は，$\mathscr{E}_c^\infty(X\times Y)$ から $C_c^\infty(Y)$ への連続線形写像となる．もし S の台がコンパクトであればこの写像は $\mathscr{E}^\infty(X\times Y)$ から $\mathscr{E}^\infty(Y)$ への連続線形写像でもある．

ここに用いた記号の意味は明らかであろう．$\langle S_x,\phi(x,y)\rangle$ は，X 上の超関数 S がテスト関数 $x\mapsto\phi(x,y)$ において取る値である．y はパラメーター（助変数）の役割をしている．

定理 40.3 の証明 これには，定理 40.1 またはその系と定理 40.2 を組合せれば十分である.

T を Y 上の超関数とすれば，定理 40.3 によって

$$\mathscr{C}_c^\infty(X\times Y)\ni\phi\mapsto\langle T_y,\ \langle S_x,\ \phi(x,\ y)\rangle\rangle$$

は $X\times Y$ 上の超関数を定義する．同様にして

$$\mathscr{C}_c^\infty(X\times Y)\ni\phi\mapsto\langle S_x,\ \langle T_y,\ \phi(x,\ y)\rangle\rangle$$

もまた $X\times Y$ 上の超関数を定義する．次の結果によれば，これら二つの超関数は一致する．それは，x および y に関する積分の順序を入れ替えるのと同種の規則と見ることができる．積分論との類比によって，しばしば，**超関数に対する Fubini の定理** (Fubin's theorem for distributions) として引用される.

定理 40.4. S を X 上の超関数，T を Y 上の超関数とするとき，任意のテスト関数 $\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(X\times Y)$ に対して

$$\langle S_x,\ \langle T_y,\ \phi(x,\ y)\rangle\rangle=\langle T_y,\ \langle S_x,\ \phi(x,\ y)\rangle\rangle \tag{40.2}$$

が成り立つ

証　明 等式 (40.2) は，$\phi(x,\ y)=u(x)v(y)(u\in\mathscr{C}_c^\infty(X),\ v\in\mathscr{C}_c^\infty(Y))$，の形のテスト関数に対しては，明らかに成り立つ．したがって，ϕ が積 $u(x)v(y)$ の有限和のときにも成り立つ．換言すれば，$\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(X)\otimes\mathscr{C}_c^\infty(Y)$ に対して成り立つ．(39 章例 II_c)．ところで，$\mathscr{C}_c^\infty(X)\otimes\mathscr{C}_c^\infty(Y)$ は $\mathscr{C}_c^\infty(X\times Y)$ の稠密な部分空間であり (定理 39.2), (40.2) の両辺は ϕ に関して連続だから，結果が成り立つ．(証終).

定義 40.3. S を X 上の超関数，T を Y 上の超関数とするとき，$X\times Y$ 上の超関数

$$\mathscr{C}_c^\infty(X\times Y)\ni\phi\mapsto\langle S_x,\ \langle T_y,\ \phi(x,\ y)\rangle\rangle=\langle T_y,\ \langle S_x,\ \phi(x,\ y)\rangle\rangle$$

を，S と T (または T と S) の**テンソル積**とよび，

$$S\otimes T \text{ または } T\otimes S \text{ (または } S_x\otimes T_y \text{ 等)}$$

によって表わす．

超関数のテンソル積に関する若干の基本的性質を（証明なしで）述べよう[1]．

命題 40.3. (a)　$(S, T)\mapsto S\otimes T$ は $\mathscr{D}'(X)\times\mathscr{D}'(Y)$ から $\mathscr{D}'(X\times Y)$ への双線形写像である．

(b)　$\operatorname{supp}(S\otimes T)=(\operatorname{supp} S)\times(\operatorname{supp} T)$

(c)　$(S, T)\mapsto S\otimes T$ は $\mathscr{E}'(X)\times\mathscr{E}'(Y)$ から $\mathscr{E}'(X\times Y)$ への双線形写像である．

(d)　$P(x, D_x)$ および $Q(y, D_y)$ をそれぞれ X および Y 上の微分作用素（$\mathscr{C}^\infty$-係数，23章例 III 参照）とすれば，

$$P(x, D_x)Q(y, D_y)(S_x\otimes T_y)=(P(x, D_x)S_x)\otimes(Q(y, D_y)T_y)$$

が成り立つ

(e)　S と T が共に局所的 L^1 関数であれば，$S\otimes T$ は，関数の意味での S と T のテンソル積（39章例 II）に等しい．

定義 40.4. $\mathscr{D}'(X)\otimes\mathscr{D}'(Y)$ によって，$S\otimes T$, $S\in\mathscr{D}'(X)$, $T\in\mathscr{D}'(Y)$ の形の超関数が張る $\mathscr{D}'(X\times Y)$ の部分空間を表わす．

$\mathscr{D}'(X)\otimes\mathscr{D}'(Y)$ は明らかに $\mathscr{D}'(X)$ と $\mathscr{D}'(Y)$ のテンソル積になっている[2]．同様にして，$\mathscr{D}'(X)\otimes\mathscr{E}'(Y)$, $\mathscr{E}'(X)\otimes\mathscr{E}'(Y)$ 等の記号を用いる．意味は明らかであろう．

命題 40.4. $\mathscr{D}'(X)\otimes\mathscr{D}'(Y)$ および $\mathscr{E}'(X)\otimes\mathscr{E}'(Y)$は，それぞれ $\mathscr{D}'(X\times Y)$ および $\mathscr{E}'(X\times Y)$ において稠密である．

実際，どちらのテンソル積も共に $\mathscr{C}_c^\infty(X)\otimes\mathscr{C}_c^\infty(Y)$ を含んでいるが，$\mathscr{C}_c^\infty(X)\otimes\mathscr{C}_c^\infty(Y)$ は $\mathscr{C}_c^\infty(X\times Y)$ において稠密であり（定理 39.2），また $\mathscr{C}_c^\infty(X\times Y)$ は $\mathscr{E}'(X\times Y)$ および $\mathscr{D}'(X\times Y)$ において稠密（定理 28.2）だからである．

この章の終に当って，超関数の合成積がどのようにテンソル積と結びついて

1)　証明はすべて易しい．

2)　すなわち，定義 39.2 の条件を満たすという意味．

いるかを，述べておこう.

定理 40.5. S と T を $\mathbf{R}^n$ 上の台がコンパクトな超関数とする．このとき，任意のテスト関数 $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して，次式が成り立つ.

(40.3) $$\langle S*T, \phi\rangle = \langle S_x \otimes T_y, \phi(x+y)\rangle.$$

もし，S の台だけがコンパクトで，$\mathrm{supp}\,T$ が任意ならば，$g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ を $\mathrm{supp}\,S$ の近傍で1に等しい関数とするとき

(40.4) $$\langle S*T, \phi\rangle = \langle S_x \otimes T_y, g(x)\phi(x+y)\rangle$$

が成り立つ.

(40.4) の右辺は，$(x, y) \mapsto g(x)\phi(x+y)$ の台が $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ においてコンパクトだから，意味をもつ．T の台もコンパクトなときには，(40.3) と (40.4) は明らかに一致する.

証明は読者に委せる.

演 習 問 題

40.1. $X \subseteq \mathbf{R}^m$, $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ を開集合とし，S を X 上の超関数，T を Y 上の超関数とする．このとき，$S \otimes T$ が $X \times Y$ 上の Radon 測度になるための必要十分条件は，S と T が共に Radon 測度になることである．このことを証明せよ.

40.2. E を局所凸 Hausdorff 空間，Y を複素空間 $\mathbf{C}^n$ の開集合とする．このとき，次の諸概念を比較せよ.

(1) 解析関数 $f: Y \to E$. これは，$f \in C^\infty(Y; E)$ であって，各点 $y^0 \in Y$ に対して E の元からなる族 $\{\mathbf{f}_p(y^0)\}(p \in \mathbf{N}^n)$ が存在して，次の二条件を満足することを言う.

(i) 級数

$$\sum_{p \in \mathbf{N}} \frac{1}{p!}(y-y^0)^p \mathbf{f}_p(y^0)$$

は y^0 の或る近傍で絶対収束する[1].

(ii) 上の級数の和は，y^0 の或る近傍において，$f(y)$ に等しい.

(2) Y において複素的可微分関数. 定義 40.1 を複素ベクトル y, y^0 について述べたもの.

---

1) 絶対収束の定義については 484 頁脚注参照．また 574 頁の定義 45.1 参照.

(3) Y における Cauchy-Riemann 方程式の解. これは，$f: Y \to E$ が1回連続的可微分 ($\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{R}^{2n}$ と同一視して，定義 40.1 の意味で考えたもの) であって，すべての $y^0 \in Y$ において，nの条件

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}+(-1)^{1/2}\frac{\partial f}{\partial \eta_j}\right)(y^0)=0,\ j=1,\dots,n$$

を満たすもの. ここで，$y_j=\xi_j+(-1)^{1/2}\eta_j(1 \leqslant j \leqslant n,\ \xi,\ \eta$ は実ベクトル) とおいた.

このとき，上の三つの概念が一致するのに十分であるような，E に対する適当な条件は何であろうか?

40.3. $X \subseteq \mathbf{C}^m$, $Y \subseteq \mathbf{C}^n$ を開集合とする. X 上の解析的汎関数 μ と Y 上の解析的汎関数 ν のテンソル積 $\mu_x \otimes \nu_y$ の定義をあたえ，その基本的性質を述べよ.

40.4. $\mathscr{F}$ を $\mathbf{C}^n$ 上の Fourier-Borel 変換とし，μ, ν を $\mathbf{C}^n$ 上の二つの解析的汎関数とする. このとき，任意の $h \in H(\mathbf{C}^n$ 上の整関数) に対して

$$\langle \mu * \nu,\ h\rangle = \langle \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}\mu\mathscr{F}\nu),\ h\rangle = \langle \mu_x \otimes \nu_y,\ h(x+y)\rangle$$

が成り立つことを証明せよ (演習問題 80.3 および 40.3 参照).

41.

双線形写像．準連続性

E, F, G を三つの位相ベクトル空間とし，

$$\Phi : (x, y) \mapsto \Phi(x, y)$$

を $E \times F$ から G への双線形写像とする．これは．各 $x_0 \in E$（或は，各 $y_0 \in F$）に対して，写像

$$\Phi_{x_0} : y \mapsto \Phi(x_0, y)$$

$$（或は，\Phi_{y_0} : x \mapsto \Phi(x, y_0)）$$

が，E（或は F）から G への線形写像であることを意味する．双線形写像 Φ が**分離連続** (separately continuous) であるとは，すべての x_0, y_0 に対して，これらの線形写像が連続であるときに言う．実際上は，解析学で考察される双線形写像は，すべて分離連続である．しかし，それらの中で，連続でないものは多数ある．連続性の意味を，もっとはっきりと述べて見よう．それは，G における 0 の任意の近傍 W に対して，E および F においてそれぞれ 0 の近傍 U, V が存在して

$$x \in U, y \in V \text{ ならば } \Phi(x, y) \in W$$

となることを意味する．E, F, G が三つとも局所凸の場合には，この条件は次のように言い直すことができる．G 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{r}$ に対して，それぞれ E および F 上のセミノルム $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ が存在して，すべての $x \in E, y \in F$ について

$$\mathfrak{r}(\Phi(x, y)) \leqslant \mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y)$$

が成り立つ．実際，それには，W として $\mathfrak{r}$ の閉単位球をとり，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ はそれ

らの閉単位がそれぞれ U および V に含まれるようにえらべばよい. そうすれば, すべての $\varepsilon>0$ に対して, $[\mathfrak{p}(x)+\varepsilon]^{-1}x\in U$, $[\mathfrak{q}(x)+\varepsilon]^{-1}\in U$ となり, またすべての $\lambda, \mu>0$ について

$$\mathfrak{r}(\Phi(\lambda x,\ \mu y))=\lambda\mu\mathfrak{r}(\Phi(x,\ y))$$

となるから, 求める不等式が得られる.

すでに見たように (定理 34.1 の系), E が Fréchet 空間, F が距離付け可能な TVS, G が局所凸空間とした場合には, $E\times F$ から G への分離連続双線形写像はすべて連続になる. 同種の興味ある結果として, 次のものがある.

定理 41.1. F, G を回帰的 Fréchet 空間の強双対とし, E はノルム空間であるか或は回帰的 Fréchet 空間の強双対であるとする. このとき, $E\times F$ から G への分離連続双線形写像は, すべて連続である.

定理 41.1 の証明

1. E がノルム空間の場合. $\Phi: E\times F\to G$ を分離連続双線形写像とする. $x\in E, z'\in G'$ に対して

$$\Phi'(x, z')={}^t\Phi_x(z')$$

とおこう. ここで ${}^t\Phi_x: G'\to F'$ は, $\Phi_x: y\mapsto\Phi(x, y)$ の転置である. このとき, $\Phi': E\times G'\to F_\sigma'$ は分離連続になることを主張しよう (この主張から, Φ' が連続なことが出る; なぜなら, E は距離付け可能であり, G' は Fréchet 空間だから). 実際, $x\in E, y\in F, z'\in G'$ に対して

$$\langle\Phi'(x, z'), y\rangle=\langle z', \Phi(x, y)\rangle \tag{41.1}$$

が成り立つが, ここで x を固定して, $\sigma(G', G)$ に関して $z'\to 0$ とすれば, $\sigma(F', F)$ に関して $\Phi'(x, z')\to 0$ となることがわかる. このとき, F が F' の双対であり, G が G' の双対であること (F', G' には, その Fréchet 構造を入れて考えている) を思い出せば, 補題 37.6 によって, $z\mapsto\Phi'(x, z')$ は G' から F' への連続線形写像となる. 次に z' を固定して考えれば, (41.1) から, E にお

いて $x \to 0$ とすれば，F' における弱収束の意味で $\Phi'(x, z') \to 0$ を得る．これで主張は証明された．

さて．W を G における 0 の任意の近傍とすれば，W は C^0 の形の 0 の近傍を含まねばならない．ここで C は G' の有界集合である．いま，U を E の閉単位球とすれば，U は E の有界集合である（ここで E がノルム空間であることを用いた）．したがって，ただちにわかるように，$\Phi'(U, C)$ は F_σ' 有界集合である．ところで，F' の Fréchet 位相は F' と F の間の双対性に整合しているから，定理 36.2 (Mackey の定理) によって，$\Phi'(U, C)$ は F' の有界集合となる．これを B と書こう．さて，$x \in E$ が U に属し，$y \in F$ が B^0 に属し，$z' \in G'$ が C に属するとすれば，(41.1) から

$$|\langle z', \Phi(x, y)\rangle| \leqslant 1$$

を得る．換言すれば，$\Phi(x, y) \in C^0$ となる．かくして，$\Phi(U, B^0) \subseteq W$ を得るが，これは Φ の連続性を示している．

2. <u>E が回帰的 Fréchet 空間の強双対の場合</u>．$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \cdots$ を E' における 0 の減少する近傍基底とする．各 U_n は閉凸平衡的と仮定しておく．$U_n{}^0$ の張る E の線形部分空間を E_n と書く．E_n には，$U_n{}^0$ をその閉単位球とする標準的 Banach 空間構造を入れる（記号 37.1 とそれに続く諸注意を見よ：補題 36.1 も参照）．$U_n{}^0$ は E において有界だから（$U_n{}^0$ は $\sigma(E, E')$ に関して有界であるが，E は樽型空間 E' の強双対だからよい），E_n の位相は E から誘導位相よりも細かい．このことからただちにわかることは，Φ を $E_n' \times F$ に制限したものが，この積空間から G への双線形写像として，分離連続になることである．E_n はノルム空間だから，上の証明の第 1 の場合によって，$\Phi: E_n \times F \to G$ は連続となる．そこで，W を G における 0 の任意の閉凸平衡的近傍とすれば，各 $n = 1, 2, \ldots$ について，F' の有界集合 B_n が存在して

$$\Phi(U_n{}^0, B_n{}^0) \subseteq W \tag{41.2}$$

が成り立つ．ここで，次の簡単な補題を用いる．

補題 41.1. $\{B_k\}(k = 1, 2, \ldots)$ を距離付け可能な TVS M の有界集合列とす

れば，数列 $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k > 0$ が存在して，合併集合 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k B_k$ が有界となる．

補題 41.4 の証明　M における 0 の減少する可算近傍基底 $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_n \supseteq \cdots$ をえらんでおく．各 $k = 1, 2, \ldots$ に対して $\varepsilon_k > 0$ を，$\varepsilon_k B_k \subseteq V_k$ となるようにえらぶ．この数列 $\{\varepsilon_k\}$ が，われわれの要求を満たすものとなる．実際，任意の $n (n = 1, 2, \ldots)$ を定めたとき，$\eta_n > 0$ を適当にとれば，$\eta_n \varepsilon_k B_k \subseteq V_n$ がすべての $k < n$ に対して成りたつようにできるが，$k \geqslant n$ に対しては $\varepsilon_k B_k \subseteq V_k \subseteq V_n$ だからよい[1]．

さて，定理 41.1 の証明にもどろう．F' は Fréchet 空間だから，補題 41.1 を有界集合列 $\{B_n\}$ に適用すれば，正数列 ε_n が存在して，$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n B_n$ が F' で有界となる．$(\varepsilon_n B_n)^0 = \varepsilon_n^{-1} B_n^0$ となることを思い出せば，(41.2) から

$$\Phi(\varepsilon_n U_n^0, (\varepsilon_n B_n)^0) \subseteq W$$

が導かれる．ところで，B の極集合は $\varepsilon_n B_n$ の極集合に含まれるから

$$\Phi(\varepsilon_n U_n^0, B^0) \subseteq W$$

となる．他方，W は閉凸平衡的だから，U を集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n U_n^0 \subseteq E$ の閉凸平衡包としても

$$\Phi(U, B^0) \subseteq W$$

が成り立つ．したがって，U が E における 0 の近傍になることが証明されれば，証明は完結する．もちろん $U = U^{00}$ だから，このためには，U^0 が E' の有界集合になることを示せば十分である．ところが，各 n に対して $\varepsilon_n U_n^0 \subseteq U$ だから，$\varepsilon_n^{-1} U_n = (\varepsilon_n U_n^0)^0 \supseteq U$ となる．これは U が有界集合であることを示している．(証終)．

系 1.　合成積写像

$$(S, T) \mapsto S * T$$

は，$\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ から $\mathcal{E}'$ への連続双線形写像である．

系 2.　超関数のテンソル積

1)　すなわち，$\eta_n > 0$ をはじめから，$\leqslant 1$ となるようにとっておけば，$\eta_n \bigcup_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k B_k \subseteq V_n$．

$$(S,\ T)\mapsto S\otimes T$$

は，$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^m)\times\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ から $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^{m+n})$ への連続双線形写像である．($\mathcal{E}'$ を $\mathcal{S}'$ でおきかえても成り立つ．)

定理 34.1 と 41.1 を十分に利用しても，重要な双線形写像であって連続でないものが数多く残る．それらのうちから，二つの例を挙げよう．

(1) $\mathcal{C}^\infty\times\mathcal{C}_c^\infty$ から $\mathcal{C}_c^\infty$ への乗法写像 $(\phi,\ \psi)\mapsto\phi\psi$，および $\mathcal{C}^\infty\times\mathcal{D}'$ から $\mathcal{D}'$ への乗法写像 $(\phi,\ T)\mapsto\phi T$ (演習問題 41.1 と 41.2 参照).

(2) $\mathcal{C}_c^\infty\times\mathcal{D}'$ から $\mathcal{C}^\infty$ (或は $\mathcal{D}'$) への合成積写像 $(\phi,\ T)\mapsto\phi * T$，および $\mathcal{E}'\times\mathcal{D}'$ から $\mathcal{D}'$ への合成積写像 $(S,\ T)\mapsto S*T$.

さらに，もっと多くの例を挙げることもできよう．しかしながら，これらの双線形写像は，連続ではないとは言うものの，分離連続性よりももっと強い性質を持っており，それが大抵の場合において，連続性のないことに基づく不便さを軽減しているのである．その性質というのは，準連続性[1]とよばれるものである，次に，その定義を述べよう．

定義 41.1. 双線形写像 $\Phi: E\times F\to G$ が**準連続** (hypocontinuous) であるとは，次の二条件を満たすことを言う．

(HC 1) E の任意の有界集合 A に対して，写像 $\Phi_x: F\to G$ は，x が A の中を動くとき，線形写像の同等連続集合を成す．

(HC 2) F の任意の有界集合 B に対して，写像 $\Phi_y: E\to G$ は，y が B の中を動くとき，線形写像の同等連続集合を成す．

この定義はいろんな風に言い替えることができる．まず，写像 $\Phi_x,\ \Phi_y$ は

$$\Phi_x:\ y\mapsto\Phi(x,\ y),\ \Phi_y:\ x\mapsto\Phi(x,\ y)$$

であったことを思い出そう．写像 Φ が準連続であるとは，x (或は y) が E (或は F) において 0 に収束し，残りの変数が一つの有界集合に留まるとき，$\Phi(x,\ y)$ は G において 0 に収束するということである．換言すれば，G における 0

1) 亜連続性とも訳される．

の任意の近傍Wと, E (或は F) の任意の有界集合 A (或は B) に対して, F (或は E) における 0 の近傍 V (或は U) が存在して,

$$\Phi(A, V) \subseteq W, \Phi(U, B) \subseteq W$$

が成り立つということである.

われわれにとって, 準連続性の最も役立つ判定法は, 次のものである.

定理 41.2. E, F を樽型空間 (定義 33.1) とし, G を局所凸空間とするとき, $E\times F$ から G への分離連続双線形写像は, すべて準連続である.

定理 41.2 の証明 A を E の有界集合とし, y を F の任意の点としよう. Φ は分離連続であるから, G の 0 の任意の近傍Wに対して, E の 0 の近傍 U が存在して, $\Phi(U, y) \subseteq W$となる. そこで, $\rho > 0$ を $A \subseteq \rho U$ となるようにえらべば, $\Phi(A, y) \subseteq \rho\Phi(U, y) \subseteq \rho W$を得る. これは, $\Phi(A, y)$ が G において有界なことを示している[1]. 換言すれば, x が A の中を動くとき, 写像 Φ_x は, 各点収束位相に関して有界な, F から G への連続線形写像の集合を成すということである. このとき, 仮定によって Banach–Steinhaus の定理 (定理 33.1) を適用することができて, $\Phi_x (x \in A)$ は線形写像の同等連続集合になることがわかる. 同じ議論は, Eと F の役割を替えても成りたつ. (証終).

今まで出会った (またはこれから, 出会うであろう). 双線形写像は, すべて分離連続である. また, それらの双線形写像が定義されている空間は, たいていの場合, 樽式である. したがって, これらの写像は, たいていの場合, 準連続になる. このことは特に, 526 頁に挙げた例, およびその他の数多くの例に当てはまる. ところで, ここに導入した準連続性の概念は, 非常に重要ではあるが, 或る意味では特殊なものであるとも言わなければなるまい. というのは, そこでは E および F の有界集合全体が決定的な役割を果しているが, これには必然性がないからである. たとえば, 同じ役割を E 或は F のコンパクト集合全体 (或は, 凸コンパクト集合全体) が果しても構わないであろう. たとえ

1) これは, 連続写像 Φ_y による有界集合 A の像が有界というにすぎない.

ば，もしEとFが別の空間の双対であるような場合ならば，$E\times F$上の双線形写像のうちで，EおよびFの同等連続集合に関して準連続[1]なものが興味をひくかもしれない，等々．かくして，$\mathfrak{S}$-$\mathfrak{H}$-**準連続性** ($\mathfrak{S}$-$\mathfrak{H}$-hypocontinuity)[2]の概念が定義できることは，明らかであろう．ここで，$\mathfrak{S}$および$\mathfrak{H}$は，それぞれEおよびFにおける有界集合の適当な族である．たとえば，$\mathfrak{S}$と$\mathfrak{H}$が共に有限部分集合全体からなる族とするならば，$\mathfrak{S}$-$\mathfrak{H}$-準連続性は分離連続性に帰着する．

演　習　問　題

41.1.　局所凸空間Eが樽型ならば，$E\times E'$上の双線形形式

$$(x,\ x')\mapsto\langle x',\ x\rangle$$

は準連続になることを証明せよ．

41.2.　演習問題19.5を解け．

41.3.　$\mathcal{P}_n$および$\mathcal{Q}_n$をn個の文字に関する（複素係数の）多項式の空間および形式的巾級数の空間とし，それぞれの Fréchet 位相およびLF-位相を入れたものとする．このとき，$\mathcal{P}_n\times\mathcal{Q}_n$の双対性の括弧式

$$(P,\ u)\mapsto\langle P,\ u\rangle$$

は，準連続ではあるが連続でないことを証明せよ．

41.4.　記号は前演習問題と同じとするが，$\mathcal{P}_n$には$\mathcal{Q}_n$の Fréchet 位相による誘導位相を入れるとする．このとき，$\mathcal{P}_n$と$\mathcal{Q}_n$の間の双対性の括弧式は，分離連続にならないことを証明せよ．

41.5.　E, F, Gを三つの局所凸 TVS とする．このとき，Eを Baire 空間，Fを距離付け可能な空間とすれば，$E\times F$からGへの分離連続双線形写像は，すべて連続であることを証明せよ．

41.6.　E, Fを二つの Fréchet 空間．Gを局所凸 Hausdorff 空間として，E', F', G'をそれぞれE, F, Gの双対とする．また，uを$E_\sigma'\times F_\sigma'$から$G_\sigma'$への分離連続双線形写像とする．いま，任意の$z\in G,\ x'\in E',\ y'\in F'$に対して

$$\langle z,\ u(x',\ y')\rangle=\langle v_z(x'),\ y'\rangle$$

とおくならば，この式によって，線形写像$v_z: E'\to F''$が定義される．

このとき，次の事実を証明せよ．

---

1)　すなわち，準連続性の定義において，'有界集合' を '同等連続集合' におきかえたもの．

2)　($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$)-**準連続性** (($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$)-hypocontinuity) と書かれることも多い．

(1) v_z は E_{σ}' から F_{σ} への連続線形写像である.

(2) z が G の有界部分集合 C の中を動くとき, v_z は $L(E_b', F)$ の同等連続集合を成す

(3) G の任意の有界集合 C に対して, E_b' における 0 の近傍 U' が存在して, 集合 $\{v_z(x'); z \in C, x' \in U'\}$ は F において有界となる.

また, この事実から, 双線形写像

$$u : E_b' \times F_b' \to G_b'$$

は連続になることを導け.

41.7. 上述の結果から, 回帰的 Fréchet 空間の双対となるような二つの空間からもう一つのそのような空間への分離連続双線形写像は, すべて連続になることを証明せよ (定理 41.1 参照).

41.8. 次に述べるような空間 E, F と, 双線形形式 u と v の例を挙げよ. E は Fréchet 空間, F は LE-空間であって共に回帰的であり, u は $E \times F$ 上の, v は $E' \times F'$ 上の双線形形式であって, 次の性質をもつ.

(a) u は準連続であるが, 連続ではない.

(b) v は $E_{\sigma}' \times F_{\sigma}'$ 上でも $E_b' \times E_b'$ 上でも分離連続であるが, このどちらの上でも連続でない.

41.9. E, F, G を三つの局所凸 Hausdorff 空間とし, E_0 および F_0 をそれぞれ E および F の稠密な線形部分空間とする. いま, $u : E \times F \to G$ を分離連続双線形写像とするとき, 次のことを証明せよ.

(i) $E_0 \times F_0$ において $u = 0$ ならば, $E \times F$ において $u = 0$

(ii) u の $E_0 \times F_0$ への制限が準連続ならば, E_0 (或は F_0) の任意の有界部分集合 A_0 (或は B_0) に対して, 写像 [1] の集合

$$y \mapsto u(x, y),\ x \in A$$

$$(\text{或は},\ x \mapsto u(x, y),\ y \in B_0)$$

は同等連続である.

41.10. E, F, G, E_0, F_0 は演習問題 41.9 と同じとする. さらに, E (或は F) の各点は E_0 (或は F_0) のそれぞれ適当な有界集合の閉包に属すると仮定する. このとき, u_0: $E_0 \times F_0 \to G$ を準連続双線形写像とすれば, u_0 の拡張となるような分離連続双線形写像 $u : E \times F \to G$ が唯一つ存在する. さらに, この写像 u は, 演習問題 41.9 における性質 (ii) をもつ. これらのことを証明せよ.

41.11. E, F, G を三つの局所凸 Hausdorff TVS とする. 空間 $L(E; F)$, $L(F; G)$,

---

1) 写像は, F (成は E) から G へ写像である.

$L(E;G)$ には，三つともに有界収束の位相（またはコンパクト収束の位相，または各点収束の位相）を入れて考える．このとき，次の事実を証明せよ．

(a)　$L(F;G)$ の任意の同等連続部分集合 H に対して，合成写像

$$(u,\ v)\mapsto v\circ u$$

は，$L(E;F)\times H$ から $L(E;G)$ への連続写像である．

(b)　F を樽型空間とすれば，$L(E;F)$ において u に収束する任意の列 $\{u_k\}$ と，$L(F;G)$ において v に収束する任意の列 $\{v_k\}$ に対して，列 $\{v_k\circ u_k\}$ は $L(E;G)$ において $v\circ u$ に収束する．

42.

双線形形式の空間．
線形写像の空間および
テンソル積との関係

この章で考察する位相ベクトル空間は，すべて局所凸 Hausdorff 空間である．E, F, G をそのような三つの空間としよう．

記号 42.1. $\mathcal{B}(E, F; G)$ によって，$E \times F$ から G への分離連続双線形写像の全体からなる空間を表わし；$B(E, F; G)$ によって $E \times F$ から G への連続双線形写像の全体からなる空間を表わす．G がスカラー体 ($\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$) のときには，これらの空間を，それぞれ $\mathcal{B}(E, F)$ および $B(E, F)$ によって表わす．

$\mathcal{B}(E, F; G)$ が線形空間 (自然な加法とスカラー乗法に関して) になることは明らかである．$B(E, F; G)$ はその線形部分空間である．

$\mathfrak{S}$ (或は $\mathfrak{H}$) を E (或は F) の有界集合族として，$B(E, F; G)$ 上に $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{H}$-位相，すなわち，$A \times B$, $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{H}$ の形をした各積集合上での一様収束の位相を考えることができる．この位相に関する 0 の近傍基底としては，集合

$$\mathcal{U}(A, B; W) = \{\Phi \in B(E, F; G); \Phi(A, B) \subseteq W\}$$

の族をとればよい．ここで A, B はそれぞれ $\mathfrak{S}$ および $\mathfrak{H}$ の中を動き，W は G の 0 の一つの近傍基底を動くものとする．もちろん，ここで検証すべきことは，TVS において 0 の近傍基底が満たすべき諸条件を集合族 $\{\mathcal{U}(A, B; W\}$ が満足していることである．特別の場合として，これらの集合は，吸収的でなければならない．このことは，連続双線形写像を対象にしていることを想起すれば，容易に検証できる． しかしながら， 分離連続双線形写像を対象とするならば，

このことは必ずしも成り立たない．実際，双線形写像Φが $\mathcal{U}(A, B\,;\,W)$ の形の集合[1] に吸収されるためには，$\Phi(A, B)$ が W に吸収されることが必要十分であり；これがすべての W について成り立つとすれば，$\Phi(A, B)$ は G の有界集合でなければならない．ところで，A, B をそれぞれ E および F の有界集合とするとき，Φ が単に分離連続というだけでは，$\Phi(A, B)$ は一般には G において有界にはならないからである．もちろん，ただちにわかるように，Φ が準連続であるならばこのことは成り立つ．したがって，E と F が樽式空間，G が局所凸空間のときには，($B(E, F\,;\,G)$ 上だけでなく) $\mathcal{B}(E, F\,;\,G)$ 上にも $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{H}$-位相を定義することができる．その他にも，次の結果が示すように，この定義が可能な場合がある．

命題 42.1. E, F, G を三つの局所凸空間，E_b', F_b' をそれぞれ E, F の強双対とする，A', B' をそれぞれ E', F' の同等連続部分集合とし，Φ を $E_b' \times F_b'$ から G への分離連続双線形写像とする．このとき，$\Phi(A', B')$ は，G の有界集合となる．

命題 42.1 の証明　A', B' は閉凸平衡的と仮定してよく，したがって，凸平衡的かつ弱コンパクトとしてよい (命題 32.3 と 32.8)．x' が A' の中を動くとき，写像 $\Phi_{x'} : F_b' \to G$ の族は，連続線形写像の集合として，F_b' 上の各点収束位相に関して有界である．したがって (演習問題 36.4)，それは F_b' の凸平衡的かつ完備な各集合上の一様収束位相に関しても有界である．その特別の場合として，集合

$$\bigcup_{x' \in A'} \Phi_{x'}(B') = \Phi(A', B')$$

は G で有界となる．(証終)

容易に検証できるように，各積集合 $A' \times B'$ (A', B' はそれぞれ E', F' の同等連続部分集合) 上の一様収束位相によって，$\mathcal{B}(E_b', F_b'\,;\,G)$ は局所凸 TVS となる．この TVS を $\mathcal{B}_\varepsilon(E_b', F_b'\,;\,G)$ によって表わす．$\mathcal{B}_\varepsilon(E_b', F_b'\,;\,G)$ の部分

---

1)　上の $\mathcal{U}(A, B\,;\,W)$ の式で $B(E, F\,;\,G)$ を $\mathcal{B}(E, F\,;\,G)$ でおきかえたもの．

空間として，E', F' にそれぞれの弱位相を入れたとき分離連続となる双線形写像 $E'\times F'\to G$ の全体がなす空間 $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma'; G)$ が，後に重要となる．この空間に $\mathcal{B}_\varepsilon(E_b', F_b'; G)$ からの誘導位相を入れたものを

$$\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma'; G)$$

によって表わす．この位相は，しばしば **ε–位相** (ε–topology) として引用される．最後に，G が Hausdorff のときには，これらの位相はすべて Hausdorff になることを注意しておく．

さて，われわれの注意の焦点を双線形形式のなす諸空間におくことにし，E および F の弱双対 E_σ' と F_σ' の積空間上の分離連続双線形形式全体のなす空間 $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ をまず取り上げよう．その理由は後に明らかになる．ここで示したいことは，$\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ から $L(E_\sigma'; F_\sigma)$ の上への（ベクトル空間構造に関する）標準的同形写像の存在である．$L(E_\sigma'; F_\sigma)$ は，E_σ' から弱位相 $\sigma(F, F')$ を入れた F への連続線形写像の空間である．次は，$\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ に ε–位相 を入れたとき，この同形写像を位相的構造も含めた同形写像にすることである．かくして，$L(E_\sigma'; F_\sigma)$ に入れるべき位相は，F に始位相[1]（その弱位相でなく）を入れたときの，E' の各同等連続部分集合上の一様収束の位相[2]である．このことは，E_σ' から F_σ への連続線形写像は E_τ' から F への連続線形写像と同じものになるということに気付かなければ，少々奇妙に見えるかも知れない．ここで，添字 τ は E' 上の Mackey 位相，すなわち，E の凸平衡的弱コンパクトな各集合上の（連続線形形式の）一様収束位相を意味している．さて，これら種々の事実を述べて証明しよう．

命題 42.2. E, F を二つの局所凸 Hausdorff TVS とする．このとき，次のことが成り立つ．

(1)　$L(E_\sigma'; F_\sigma) = L(E_\tau'; F)$

1)　F に始めから入っている位相，もとの位相．

2)　すなわち，E' の任意の同等連続部分集合 A' と F の（始位相に関する 0 の近傍 V に対して $\mathcal{U}(A', V) = \{u \in L(E_\sigma'; F_\sigma)\,;\, u(A') \subseteq V\}$ とおく．このようにして得られる $\mathcal{U}(A', V)$ の全体が，この位相に関する $0 \in L(E_\sigma'; F_\sigma)$ の近傍基底である．

(2) 写像 $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$, ただし

$$\tilde{\Phi} : x' \mapsto \Phi_{x'}, \qquad \Phi_{x'} : y' \mapsto \Phi(x', y'),$$

は, $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ から $L(E_\sigma'; F_\sigma)$ の上への (ベクトル空間構造に関する) 同形写像である.

(3) 写像 $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ は, $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ から $L_\varepsilon(E_\tau', F)$ の上への (TVS 構造に関する) 同形写像である. ここで $L_\varepsilon(E_\tau', F)$ は空間 $L(E_\tau', F)$ に E' の各同等連続部分集合上の一様収束位相を入れたものである.

(1) の証明. $u : E_\tau' \to F$ が連続とすれば, その転置 ${}^t u : F_\sigma' \to E_\sigma$ は連続である (E は E_τ' の双対だから). したがって, ${}^t u$ の転置もまた連続となるが, それは $u : E_\sigma' \to F_\sigma$ に他ならない. 逆に, u を E_σ' から F_σ への連続線形写像とすれば, その転置 ${}^t u : F_\sigma' \to E_\sigma$ は連続である. そこで, V を F における 0 の任意の閉凸平衡的近傍とすると, V の極 V^0 は F_σ' の凸平衡的コンパクト集合となるから (命題 32.7 および 32.8), ${}^t u(V^0)$ は E_σ のコンパクト集合である. これを K と書けば, その極 K^0 は E_τ' における 0 の近傍となるが, ただちにわかるように (V はその弱閉凸平衡包と一致することを用いよ), $u(K^0) \subseteq V$ が成り立つ[1)].

(2) の証明. F_σ' の双対は F になるから, $\Phi_{x'}$ は F の或る元と同一致できる. その元を $\tilde{\Phi}(x')$ と書けば, すべての $x' \in E'$, $y' \in F'$ に対して

$$\Phi(x', y') = \langle y', \tilde{\Phi}(x') \rangle \tag{42.1}$$

が成り立つ. この等式から, $\tilde{\Phi} : E_\sigma' \to F_\sigma$ が連続になることは明らかである. 逆に, $\tilde{\Phi}$ があたえれば, (42.1) によって Φ を定義すれば, 明らかに $E_\sigma' \times F_\sigma'$ 上で分離連続となる.

(3) の証明. $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ の 0 の近傍基本としては, A', B' をそれぞれ E', F' の同等連続部分集合として, すべての $x' \in A'$, $y' \in B'$ に対して $|\Phi(x', y')| \leqslant 1$ となるような分離連続双線形形式 Φ の集合 $\mathscr{W}(A', B')$ の族をとればよい. 写像 $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ は, 集合 $\mathscr{W}(A', B')$ を $\mathscr{U}(A'; B'^0)$ に写す. ここで $\mathscr{U}(A'; B'^0)$

---

1) 簡単に言えば, $|\langle u(K^0), V^0 \rangle| = |\langle K^0, {}^t u(V^0) \rangle| = |\langle K^0, K \rangle| \leqslant 1$ だから.

は，連続線形写像 $E_\tau' \to F$ のうちで A' を B'^0 の中へ写すものの集合である[1]. ところで，命題36.1によれば，F における0の近傍基底として，B'^0(B' は F' の同等連続集合) の形の集合から成るものが存在する．逆に，V を F の0の閉凸平衡的近傍とすれば，V^0 は F' の同等連続部分集合であり，写像 $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ の逆写像は，$\mathcal{U}(A'; V)$ を $\mathcal{W}(A, V^0)$ に写す．(証終)

命題 42.3. E, F を局所凸 Hausdorff TVS とする．このとき．$L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ (したがって $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$) が完備になるための必要十分条件は，$E$ と F が共に完備なことである．

証 明 条件の必要性. $y \in F$ を0でない任意の元とする．各 $x \in E$ に対して，写像 $u_x: E' \to F$ を $x' \mapsto \langle x', x\rangle y$ を定義によって定義しよう．写像 $x \mapsto u_x$ は，E から $L(E_\tau'; F)$ への線形写像である．実際，E_τ' において $x' \to 0$ とするならば，もちろん E_σ' において $x' \to 0$ となり，したがって，$\langle x', x\rangle \to 0$ を得るからである． さて，写像 $x \mapsto u_x$ は，E から $L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ への (TVS 構造に関する) 同形写像であり，その像は閉部分空間であることを主張しよう．

まず明らかな事実を挙げれば：各 $x \in E$ に対して， u_x は E_τ' から (実際は E_σ' から) F への連続写像である；$x \mapsto u_x$ は線形で1対1である；u_x が $L(E_\tau'; F)$ において0に収束するための必要十分条件は，x が E' の各同等連続部分集合上で0に一様収束すること， すなわち (命題36.1)， E において0に収束することである．かくして，$x \mapsto u_x$ は同形写像 (中への) である．写像 $x \mapsto u_x$ による E の像は，E_τ' から y によって張られる一次元部分空間 $\mathbf{C}y$ (これはスカラー体が $\mathbf{C}$ の場合のことで，そうでなければ $\mathbf{R}y$) へのすべての連続線形写像の成す集合である．実際， u をそのような写像とすれば， すべての $x' \in E'$ について $u(x') = f(x')y$ (f は E_τ' 上の連続線形形式) の形となるが， このとき， $x \in E$ が存在して， $f(x') = \langle x', x\rangle$ がすべての x' について成り立つ. E_τ' から $\mathbf{C}y$ への連続線形写像全体のなす集合が $L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ において (さらに

1) (42.1) から，$|\langle B', \tilde{\Phi}(A')\rangle| = |\Phi(A', B')| \leqslant 1$. これは $\tilde{\Phi}(A') \subseteq B^{0'}$ と同値である.

$L_s(E_\tau'\,;\,F)$ においてさえも) 閉になることは明らかである[1]. [これで主張は証明された]. このことから，もし $L_\varepsilon(E_\tau'\,;\,F)$ が完備ならば，E も完備になる. ところで，$L_\varepsilon(E_\tau'\,;\,F)$ は TVS として $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ に同形だから，事情は E と F について完全に対称である. したがって，$L_\varepsilon(E_\tau'\,;\,F)$ の完備性から F の完備性も出る.

条件の十分性. F が完備であるとすれば，E' から F へのすべての線形写像 (連続でなくてもよい) の成すベクトル空間 $\mathcal{L}(E'\,;\,F)$ に，E' の各同等連続部分集合上の一様収束位相を入れたものは完備である (この位相は，一般には，$\mathcal{L}(E'\,;\,F)$ のベクトル空間構造には整合しないが，Cauchy フィルターの概念や完備性の概念は意味をもつ[2]). したがって，$L_\varepsilon(E_\tau'\,;\,F)$ がこの位相に関して $\mathcal{L}(E\,;\,F)$ の閉部分空間になることを示せば十分である.

u を E' から F への線形写像とし，それが E' の各同等連続部分集合上において，E_τ' から F への連続線形写像の一様収束の極限になっているとしよう. このとき，u は E_σ' から F_σ への連続写像になっていることを示せば十分である (命題42.2 (1)). そこで，$y' \in F'$ を任意にえらべば，$y' \circ u$ は E' 上の線形形式であって，E' の各同等連続集合上において，$\tau(E', E)$ に関して連続な E' の線形形式の一様収限となる. E_τ' の双対は E であるから，$\tau(E', E)$ に関する連続線形形式は $x' \mapsto \langle x', x\rangle$, $x \in E$ の形である. それらが E' の各同等連続集合上で一様収束するということは，命題 36.1 によって，それらに対応する x が E の完備化において収束することと同等である. したがって，もし E が完備であれば，これらの x は極限 $x_0 \in E$ を持ちすべての $x' \in E'$ について

$$\langle y' \circ u,\, x'\rangle = \langle x',\, x_0\rangle$$

が成り立つ. これは，$y' \circ u$ の連続性を示している. [$y' \in F'$ は任意だったから，これは $u : E_\sigma' \to F_\sigma$ の連続性を意味する]. (証終).

---

1) これは，F が Hausdorff なことより，F の任意の有限次元部分空間が閉であることによる (いまの場合は 1 次元；定理 9.1 系 2 参照).

2) 実際には，この位相はつねに $\mathcal{L}(E'\,;\,F)$ の加群としての構造に整合し，$\mathcal{L}(E'\,;\,F)$ は位相加群となる. Cauchy フィルター，完備性などは，この位相加群上の概念である.

さて，注意をテンソル積に向けよう．$E\times F$ から $E_\sigma'\times F_\sigma'$ 上の連続双線形形式の空間 $B(E_\sigma', F_\sigma')$ への標準的双線形写像 ϕ を，次の式で定義しよう．

(42.2) $$(x, y)\mapsto \phi(x, y):(x', y')\mapsto \langle x', x\rangle\langle y', y\rangle.$$

まず，E と F は ϕ-線形無関連（定義 39.1）であることに注意する．実際 $\{x_j\}$, $\{y_k\}$ をそれぞれ E および F の一次独立なベクトルの有限集合とするとき，E' および F' から，それぞれ $\{x_j\}$, $\{y_k\}$ と同 1 個数のベクトルからなる集合 $\{x_j'\}$, $\{y_k'\}$ をえらんで，$\langle x'_{j'}, x_j\rangle=\delta_{jj'}$, $\langle y'_{k'}, y_k\rangle=\delta_{kk'}$ となるようにすると（$\delta_{jj'}$, $\delta_{k,k'}$ は Kronecker の記号），双線形形式 $\phi(x_j, y_k)$ のとる値は，(x_j', y_k') では 1 であり．$j'\neq j$ または $k'\neq k$ のとき $(x'_{j'}, y'_{k'})$ では 0 となる．このことは，双線形形式 $\phi(x_j, y_k)$ が [(j, k) の異なるとき] 一次独立であることを意味している．次に見るべきことは (x, y) が $E\times F$ 上を動くとき，形式 $\phi(x, y)$ が $B(E_\sigma', F_\sigma')$ を張ることである．このことを証明しよう．Φ を $E_\sigma'\times F_\sigma'$ 上の連続双線形形式とすれば，E の有限部分集合 A と F の有限部分集合 B が存在して

$$x'\in A^0,\ y'\in B^0\quad ならば\quad |\Phi(x', y')|\leqslant 1$$

となる．そこで，E_A, F_B をそれぞれ A ; B で張で張られた E 或は F の線形部分空間とする．E_A, F_B は，もちろん有限次元空間である．これらの空間の直交，$(E_A)^0$ および $(F_B)^0$ は有限余次元であり，

$$E'=M'\oplus(E_A)^0,\qquad F'=N'\oplus(F_B)^0\qquad(\oplus:直和)$$

と書くことができる．Φ は明らかに，$E'\times F'$ の部分空間

$$((E_A)^0\times F')+(E'\times(F_B)^0)\ ^{1)}$$

の上で 0 となる．また，この部分空間が，$M'\times N'$ と合せると $E'\times F'$ を張ることも明らか[2]．したがって，Φ は，有限次元部分空間 $M'\times N'$ へのその制限によって，完全に決定されてしまう．かくして，F_A の有限個のベクトル $x_1,\dots, x_r$ と，F_B の有限個のベクトル $y_1,\dots, y_s$ をえらぶことができて，この制限された形式（したがって，全空間 $E'\times F'$ 上の Φ）は

1) 直和ではなくて，単なる和.

2) 直和とは限らない.

$$(x', y') \mapsto \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} \langle x', x_j \rangle \langle y', y_k \rangle$$

によってあたえられる．これらのことをまとめれば，次のように述べることができる．

命題 42.4. $B(E_\sigma', F_\sigma')$ は E と F のテンソル積である．

この章につづく各章では，しばしば $E \otimes F = B(E_\sigma', F_\sigma')$ とかき，写像 (42.2) は $(x, y) \mapsto x \otimes y$ で示すことが多い，これが二つの線形写像のテンソル積の定義 (命題 39.2) と合致していることを，手取り早く示しておこう．テンソル積の一般的性質によれば，$E' \times F'$ 上の双線形形式と $E' \otimes F'$ 上の線形形式との間に，1対1の対応がある (定理 39.1). E (或は F) の各元 x (或は y) を，それが E' 上 (或は F' 上) で定義する線形形式 $x' \mapsto \langle x', x \rangle$ (或は $y' \mapsto \langle y', y \rangle$) と同一視するならば，(42.2) の双線形形式 $\phi(x, y)$ は $x \otimes y$ (命題 39.2 の記号) に対応することになる．

$B(E_\sigma', F_\sigma')$ の話にもどろう．この空間は，$E_\sigma' \times F_\sigma'$ 上の分離連続双線形形式の空間 $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ の線形部分空間と見なせる．このとき，$\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ から $L(E_\sigma'; F_\sigma)$ の上への標準的同形写像 (命題 42.2) を用いるならば，$B(E_\sigma', F_\sigma')$ を $L(E_\sigma'; F_\sigma)$ の線形部分空間と見ることもできる．ところで，下の特徴付けの証明は，読者に委せよう．

命題 42.5. $L(E_\sigma', F_\sigma)$ において，標準写像による $B(E_\sigma', F_\sigma')$ の像は，E_σ' から F への連続線形写像のうちで有限次元の像をもつもの全体のなす空間に一致する．

これらの写像に対しては，F の位相はそれが Hausdorff である限り，とくに指定する必要はない．実際，これらの写像の像空間上では，(その線形構造に整合するような) すべての Hausdorff 位相は一致するからである．有限次元空間を扱っている場合には，上に述べた種々の同形写像はすべて上への写像であり，たいていの命題が自明になってしまうことも明らかである．しかしながら，無

限次元の場合には，$B(E_\sigma', F_\sigma')$ は $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ と異なる（すなわち，$E \otimes F$ は $L(E_\sigma'; F_\sigma)$ と異なる）ばかりでなく，それは $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$（$L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ としても同値）において閉でもない．後に明らかになるように，いくつかの重要な空間の場合において，$E \otimes F$ は $L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ において稠密になることもあるし，ならないこともある．

この章を終えるに際して，ノルム空間の場合について少々述べておこう．Mackey の定理によって，E の凸平衡的弱コンパクト集合はすべて有界（始位相に関して）である．したがって，E' 上の Mackey 位相 $\tau(E', E)$ は，つねに E' 上の強双対位相よりも弱い．これは，Mackey 位相 $\tau(E', E'')$ はつねにこの強双対位相よりも強いという事実と，対照をなしている．このことから，E_τ' から F への連続線形写像は，もちろん E_b' から F への連続線形写像となる．すなわち $L(E_\tau'; F) \subseteq L(E_b'; F)$． さて，$E$ がノルム空間であれば E_b' は Banach 空間となり，E_b' の各同等連続部分集合はその原点を中心とする（有限半径の）球に含まれる．このようにして，$L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ は空間 $L_b(E_b'; F)$ の部分空間[1] と見なすことができる．命題 42.2 と 42.3 を適用すれば，次のことが成り立つ．

命題 42.6. E, F をノルム空間とすれば，$\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ はノルム空間であり，$L_b(F_b'; F)$ の部分空間 $L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ に標準的に同形である．$\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ が Banach 空間になるための必要十分条件は，E と F が共に Banach 空間になることである．

ところで，F が Banach 空間であれば，E が完備でないときでも，$L_b(E_b'; F)$ は Banach 空間になることに注意しよう．この場合には，$L_\varepsilon(E_\tau'; F)$ は $L_b(E_b'; F)$ の閉でない部分空間となる．

1) ノルムもこめて考えたときの部分空間．

演 習 問 題

42.1. E, F, G を三つの局所凸 Hausdorff 空間とし，$\mathscr{H}$ を $E\times F$ から G への準連続双線形写像全体からなるベクトル空間とする．A, B をそれぞれ E, F の有界部分集合として，積集合 $A\times B$ の形の各集合上での一様収束の位相は，$\mathscr{H}$ の線形構造に整合することを証明せよ．$\mathscr{H}$ にはこの位相が入っているとしたとき，写像

$$\mathscr{H} \ni u \mapsto (x \mapsto (y \mapsto u(x, y))) \in L(E; L(F; G))$$

は，$\mathscr{H}$ から $L(E; L(F; G))$ の上への TVS 同形写像であることを証明せよ．

42.2. 演習問題 42.1 と同じ記号を用いるとして，E と F を樽型空間，G を準完備（すなわち，有界閉集合はすべて完備）とすれば，TVS $\mathscr{H}$ は準完備になることを証明せよ．

42.3. E, F を二つの局所凸 TVS とする．$\mathfrak{S}$ を E の有界部分集合の一つの族であって，E の被覆となり，いつもの性質 ($\mathfrak{S}_{\rm I}$), ($\mathfrak{S}_{\rm II}$) を満たすものとする．さらに，E の始位相はその Mackey 位相 $\tau(E, E')$ に一致すると仮定する（たとえば，E 距離付け可能，または樽型空間）．このとき，“空間 $L_{\mathfrak{S}}(E; F)$（定義 32.1）が完備であるための必要十分条件は，$E_{\mathfrak{S}}'$（定義 19.2）と F が共に完備なことである” ことを証明せよ（命題 42.3 参照）．

43.

テンソル積上の二つの主な位相．位相テンソル積の完備化

この章では，E と F は二つの局所凸 TVS とし，$E\otimes F$ は E と F のテンソル積を表わすとする．

$E\otimes F$ は $B(E_\sigma', F_\sigma')$ に同形であること (命題 42.7) を想い起そう．

定義 43.1. $E\otimes F$ 上の **ε-位相** (ε-topology) とは，[標準的同形写像によって] $B(E_\sigma', F_\sigma')$ から持ち込まれた位相をいう．ここで $B(E_\sigma', F_\sigma')$ は，$E_\sigma'\times F_\sigma'$ 上の分離連続双線形写像全体のなす空間 $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ に，E' の同等連続部分集合と F' の同等連続部分集合の積集合になるような各集合上の一様収束の位相を入れたもの $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ の，線形部分空間と見なしている [したがって，位相は誘導位相]．空間 $E\otimes F$ に ε-位相を入れたものを，$E\otimes_\varepsilon F$ で表わす．

$E\times F$ から $E\otimes_\varepsilon F$ への標準写像 $(x, y)\mapsto x\otimes y$ が連続になることは明らかである．$E\otimes F$ 上の ε-位相は局所凸であり，これが Hausdorff になるのは，E, F が共に Hausdorff になるとき，そのときに限る．E と F がノルム空間ならば，$E\otimes_\varepsilon F$ もノルム空間となる (命題 42.6)．

さて，テンソル積の上の，もう一つの主な位相の定義に進もう．

定義 43.2. $E\otimes F$ 上の **π-位相** (π-topology) [或は**射影位相** (projective topology)] とは，$E\times F$ から $E\otimes F$ への標準的双線形写像 $(x, y)\mapsto x\otimes y$ を連続にするような $E\otimes F$ 上の局所凸位相のうちで，最も強い位相のことを言う．空間 $E\otimes F$ にこの位相を入れたものを，$F\otimes_\pi F$ で表わす．

$E\otimes F$ の凸部分集合が π-位相に関して 0 の近傍となるための必要十分条件は，写像 $(x, y)\mapsto x\otimes y$ によるその逆像が $E\times F$ における 0 の近傍を含むこと，すなわち，その集合が

$$U\otimes V=\{x\otimes y\in E\otimes F\,;\,x\in U,\,y\in V\}$$

の形の集合を含むことである．ここで U(或は V) は，E(或は F) における 0 の近傍である．換言すれば，$E\otimes_\pi F$ における 0 の近傍基底を得るには，集合 $U_\alpha\otimes V_\beta$ の凸平衡包をとればよい．ここで U_α(或は V_β) は，E (或は F) における 0 の一つの近傍基底の中を動くものとする．射影位相をセミノルムによって記述するための最良の方法は，セミノルムのテンソル積の概念を導入することである．$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ をそれぞれ E, F 上のセミノルムとし，対応する閉単位球を $U_\mathfrak{p}$, $V_\mathfrak{q}$ とする．W を $U_\mathfrak{p}\otimes U_\mathfrak{q}$ の凸平衡包とする．このとき W は吸収的であることに注意しよう．そこで

$$(43.1)\qquad (\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})(\theta)=\inf_{\theta\in\rho W,\,\rho>0}\rho,\qquad \theta\in E\otimes F$$

とおく．

定義 43.3. セミノルム $\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q}$ を，セミノルム $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ の**テンソル積**と呼ぶ．

命題 43.1. 任意の $\theta\in E\otimes F$ に対して

$$(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})(\theta)=\inf\sum_j\mathfrak{p}(x_j)\mathfrak{q}(y_j)$$

が成り立つ．ここで下限 inf は

$$\theta=\sum_j x_j\otimes y_j$$

となるような，すべての有限個の対 (x_j, y_j) に関してとったものである．さらに，すべての $x\in E$, $y\in F$ について

$$(43.2)\qquad (\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})(x\otimes y)=\mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y)$$

が成り立つ．

命題 43.1 は次のように解釈できる．定理 39.1 の証明のときのように，有限集合を台にもつような $E\times F$ 上の複素数値関数全体の空間 $\mathcal{X}$ を導入すると，

テンソル積 $E\otimes F$ は $\mathcal{X}$ の商空間 $\mathcal{X}/N$ に同形であった．ここで同形は純粋に代表的でなものである．そこで，$\mathcal{X}$ 上にセミノルム

$$f\mapsto \sum_{(x,y)\in E\times F}|f(x,\ y)|\mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y)$$

を考えれば，N を法とするこのノルムの商ノルム（命題 79 参照）が，セミノルム $\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q}$ である．

命題 43.1 の証明 $U,\ V$ をそれぞれ $\mathfrak{p},\ \mathfrak{q}$ の閉単位球とし，W を $U\otimes V$ の凸平衡包とする．$\theta\in\rho W,\ \rho>0$ と言うことは，

$$\theta=\sum_{k=1}^{N}t_k x_k\otimes y_k,\ \sum_{k=1}^{N}|t_k|\leqslant\rho,\ \mathfrak{p}(x_k)\leqslant 1,\ \mathfrak{q}(y_k)\leqslant 1$$

と書けると言うことと同値である．ここで $\xi_k=t_kx_k,\ \eta_k=y_k$ とおけば，

$$\theta=\sum_{k=1}^{N}\xi_k\otimes\eta_k,\ \sum_{k}\mathfrak{p}(\xi_k)\mathfrak{q}(\eta_k)\leqslant\rho$$

を得る．逆に，θ のこの表現から出発するならば，ε を任意の数 >0 として，次のようにする．$\mathfrak{p}(\xi_k)\mathfrak{q}(\eta_k)\neq 0$ のときには，

$$x_k=\mathfrak{p}(\xi_k)^{-1}\xi_k,\qquad y_k=\mathfrak{q}(\eta_k)^{-1}\eta_k,\qquad t_k=\mathfrak{p}(\xi_k)\mathfrak{q}(\eta_k)$$

とおく；そうでない場合，まず $\mathfrak{p}(\xi_k)\neq 0,\ \mathfrak{q}(\eta_k)=0$ のときには，

$$x_k=\mathfrak{p}(\xi_k)^{-1}\xi_k,\qquad y_k=[N\mathfrak{q}(\xi_k)/\varepsilon]\eta_k,\qquad t_k=\varepsilon/N$$

とおき，これと対称なときも同様にする；最後に $\mathfrak{p}(\xi_k)=\mathfrak{q}(\eta_k)=0$ のときには，

$$x_k=(N/\varepsilon)\xi_k,\qquad y_k=\eta_k,\qquad t_k=\varepsilon/N$$

とおく．このようにするならば，

$$\theta=\sum_{k=1}^{N}t_kx_k\otimes y_k,\quad \text{すべての } k \text{ について }\ \mathfrak{p}(x_k)\leqslant 1,\quad \mathfrak{q}(y_k)\leqslant 1$$

であり，

$$\sum_{k}|t_k|\leqslant\rho+\varepsilon$$

となる．これは $\theta\in(\rho+\varepsilon)W$ を示しており，ε は任意に小さくてよいから，$(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})(\theta)\leqslant\rho$ を得る．[これで前段の証明ができた.]

上の特別の場合として，すべての $x\in E,\ y\in F$ に対して

$$(\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})(x \otimes y) \leqslant \mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y)$$

となることに注意しておこう．ところで，Hahn-Banach の定理によれば，$x' \in E'$ (或は $y' \in F'$) が存在して

$$\langle x', x\rangle = \mathfrak{p}(x), \quad |\langle x', x_1\rangle| \leqslant \mathfrak{p}(x_1) \quad (\text{すべての } x_1 \in E)$$

(或は，$\langle y', y\rangle = \mathfrak{q}(y)$，すべての $y_1 \in F$ について $|\langle y', y_1\rangle| \leqslant \mathfrak{q}(y_1)$) が成り立つ．そこで，$\theta = x \otimes y$ が $\sum_k x_k \otimes y_k$ に等しいとすれば，

$$|\langle x' \otimes y', \theta\rangle| \leqslant \sum_k |\langle x', x_k\rangle\langle y', y_k\rangle| \leqslant \sum_k \mathfrak{p}(x_k)\mathfrak{q}(y_k).$$

これはすべての表示 $\theta = \sum_k x_k \otimes y_k$ について正しいから，

$$|\langle x' \otimes y', \theta\rangle| \leqslant (\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})(x \otimes y)$$

が成り立つ．ところで，$\theta = x \otimes y$ だから

$$\langle x' \otimes y', \theta\rangle = \langle x', x\rangle\langle y', y\rangle = \mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y)$$

ゆえに，

$$\mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y) \leqslant \mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q})(x \otimes y)$$

を得る．これを，反対向きの評価式 (この頁の始めに注意した) を組合せて，(43.2) を得る．

命題 43.2. セミノルム $\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q}$ がノルムになるためには，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ が共にノルムであることが必要十分である．

証　明　(43.2) からただちにわかるように，$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ のうちの一つがノルムでなければ，$\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{q}$ もノルムでない．セミノルム空間がノルム空間になるための必要十分条件は，それが Hausdorff であることに注意すれば，逆の方はもっと一般な次の結果から出る．

命題 43.3. E, F を二つの局所凸 TVS とするとき，$E \otimes_\pi F$ が Hausdorff になるための必要十分条件は，E と F が共に Hausdorff になることである．

証　明　$E \otimes_\pi F$ が Hausdorff ならば，E と F も Hausdorff になることは

明らかである[1]. 逆に, E, F が共に Hausdorff であると仮定して, $E\otimes F$ の任意の元 $\theta\neq 0$ に対して, $E\otimes_\pi F$ 上の連続線形形式 θ' が存在して, $\langle\theta', \theta\rangle\neq 0$ となることを示そう. そのために,

$$\theta=\sum_j x_j\otimes y_j$$

と書いて見る. ここで, 和は有限和であり, $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ はそれぞれ一次独立であるとする. E と F は Hausdorff だから, $x'\in E'$, $y'\in F'$ を $\langle x', x_1\rangle=\langle y', y_1\rangle=1$ かつ $\langle x', x_j\rangle=\langle y', y_j\rangle=0$ $(j\geqslant 2)$ となるようにえらぶことができる. このとき, $E\otimes F$ 上の線形形式

$$\theta' : \left(\sum_k \xi_k\otimes\eta_k\right)\mapsto\sum_k\langle x', \xi_k\rangle\langle y', \eta_k\rangle$$

は明らかに π-位相に関して連続であり[2], かつ $\langle\theta', \theta\rangle=1$ となる. (証終).

命題 43.2 の証明にもどって, $(E, \mathfrak{p})$, $(F, \mathfrak{q})$ をセミノルム空間とすれば, $E\otimes F$ 上の位相 π は一つのセミノルム $\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q}$ で定義される. もし $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ がノルムならば, $E\otimes_\pi F$ は Hausdorff でなければならない. すなわち, $\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q}$ はノルムである.

定義 43.4. $(E, \mathfrak{p})$, $(E, \mathfrak{q})$ をノルム空間とするとき, ノルム空間 $(E\otimes F, \mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})$ を $(E, \mathfrak{p})$ と $(E, \mathfrak{q})$ の射影テンソル積と言う.

E, F を任意の局所凸空間とし, $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$, $\{\mathfrak{q}_\beta\}$ $(\beta\in B)$ をそれぞれ E および F 上の連続セミノルム基底とするとき, $E\otimes F$ 上の π-位相に関する連続セミノルム基底としては, $\{\mathfrak{p}_\pi\otimes\mathfrak{q}_\beta\}$ $(\alpha\in A, \beta\in B)$ をとればよい.

代数的普遍性 (定理 39.1) の類似として, 空間 $E\otimes_\pi F$ は次の“普遍性”を

---

1) たとえば E が Hausdorff でないとすれば, E の元 $x\neq 0$ が存在して, E 上のすべての連続セミノルム $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p}(x)=0$ となる. いま $y\in F$ を 0 でない元とすれば, $x\otimes y\neq 0$ であるが, E 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{p}$ と F 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{q}$ に対して, $(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})(x\otimes y)=\mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y)=0$, $\mathfrak{q}(y)=0$ を得る. これは, $E\otimes_\pi F$ が Hausdorff でないことを示している.

2) $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ をそれぞれ E および F 上の連続セミノルムで, $|\langle x', \xi\rangle|\leqslant\mathfrak{p}(\xi)$, $|\langle y', \eta\rangle|\leqslant\mathfrak{q}(\eta)$ となるものとすれば, 任意の $\zeta\in E\otimes F$ について $|\langle\theta', \zeta\rangle|\leqslant(\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q})(\zeta)$ を得る.

もっている．

命題 43.4. E, F を局所凸空間とする．このとき，$E\otimes F$ 上の π-位相は，$E\otimes F$ 上の局所凸位相のうちで次の性質をもつ唯一つのものである：

G を任意の局所凸空間とするとき，$E\times F$ から G へのすべての双線形写像のなす空間から，$E\otimes F$ から G へのすべての線形写像のなす空間の上への標準的同形写像（定理 39.1)(b)) は，$E\times F$ から G へのすべての連続双線形写像のなす空間 $B(E, F; G)$ から，$E\otimes F$ から G へのすべての連続線形写像のなす空間 $L(E\otimes F; G)$ の上への同形写像を誘導する．

上の命題において，同形写像というのは，純粋に代数的意味で用いている．

証　明　双線形写像 $E\times F\to G$ と線形写像 $E\otimes F\to G$ の間の代数的対応において，$G=E\otimes F$ として見れば，標準的双線形写像 $E\times F\to E\otimes F$ には $E\otimes F$ の恒等写像が対応する．したがって，$\mathcal{T}$ を $E\otimes F$ 上の局所凸位相として，命題に述べた普遍性をもつものとすれば，$E\times F$ から $E\otimes F$ への標準的双線形写像は連続でなければならない．よって，$\mathcal{T}$ は π よりも弱い（定義 43.2)．他方，標準的双線形写像 $E\times F\to E\otimes_\pi F$ は連続だから，恒等写像 $E\otimes_{\mathcal{T}} F\to E\otimes_\pi F$ は連続でなければならない．これは，$\mathcal{T}$ で π よりも細かいことを示している．(証終)．

系． $E\otimes_\pi F$ の双対は，$E\times F$ 上の連続双線形形式の空間 $B(E, F)$ に標準的に同形である．

これは，命題 43.4 において $G=\mathbf{C}$ とすればよい．

演　習　問　題

43.1. $B(E, F; G)$ と $L(E\otimes_\pi F; G)$ の間の標準的同形写像は，同等連続部分集合を同等連続部分集合に写すことを証明せよ．また，$E\otimes F$ 上の射影位相は，$E\otimes F$ の双対と見なしたときの $B(E, F)$ の各同等連続部分集合上の一様収束の位相であることを

証明せよ．

命題 43.5. $E \otimes F$ において，位相 π は位相 ε よりも細かい．

実際，$E \times F$ から $E \otimes_\varepsilon F$ への標準的双線形写像が連続だからよい．

命題 43.6. E_i, F_i $(i=1, 2)$ を四つの局所凸 Hausdorff 空間とする．u（或は v）を E_1 から E_2 への（或は，F_1 から F_2 への）連続線形写像とする．このとき，$\mathcal{T}$ を位相 π または位相 ε とするならば，u と v のテンソル積 $u \otimes v$ は $E_1 \otimes_{\mathcal{T}} F_1$ から $E_2 \otimes_{\mathcal{T}} F_2$ への連続線形写像となる．

証　明　まず，$\mathcal{T} = \pi$ としよう．写像 $(x, y) \mapsto (u(x), v(y))$ が $E_1 \times F_1$ から $E_2 \times F_2$ への連続線形写像であることに注意して，これに $E_2 \times F_2$ から $E_2 \otimes_\pi F_2$ への標準的双線形写像を合成すれば，$E_1 \times F_1$ から $E_2 \otimes_\pi F_2$ への連続双線形写像を得る．この写像には，命題 43.4 によって，$E_1 \otimes_\pi F_1$ から $E_2 \otimes_\pi F$ への連続写像が対応するが，それは $u \otimes v$ に他ならない．

次に，$\mathcal{T} = \varepsilon$ とする．$E_i \otimes F_i$ を $B((E_i)_\sigma', (F_i)_\sigma')$ と同一視しよう $(i=1, 2)$．このときただちにわかるように，写像 $u \otimes v$ は，$(E_1)_\sigma' \times (F_1)_\sigma'$ 上の各連続双線形形式

$$(x_1', y_1') \mapsto \Phi(x_1', y_1')$$

に，$(E_2)_\sigma' \times (F_2)_\sigma'$ 上の連続双線形形式

$$(x_2', y_2') \mapsto \Phi({}^t u(x_2'), {}^t v(y_2')) \tag{43.3}$$

を対応させる写像と同一視される．ここで ${}^t u, {}^t v$ は，それぞれ u, v の転置である．いま，A_2', B_2' をそれぞ E_2', F_2' の同等連続部分集合とすれば，${}^t u(A_2)$, ${}^t v(B_2)$ はそれぞれ E_1', F_1' の同等連続部分集合となる．したがって，${}^t u(A_2') \times {}^t v(B_2')$ 上での Φ の絶対値が $\leqslant 1$ であれば，(43.3) の $A_2' \times B_2'$ 上での絶対値は $\leqslant 1$ となる．（証終）．

系． E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とするとき，$E' \otimes F'$ は $E \otimes_\varepsilon F$

の (したがって, もちろん $E\otimes_\pi F$ の) 双対の線形部分空間に標準的に同形である.

これには, 命題 43.6 において, $E_1=E$, $F_1=F$, $E_2=F_2=\mathbf{C}$ とすればよい[1].

E, F を二つの局所凸 Hausdorff TVS としよう. このとき,

定義 43.5. $E\otimes_\varepsilon F$, $E\otimes_\pi F$ の完備化を, それぞれ $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$, $E\widehat{\otimes}_\pi F$ によって表わす.

E_i, F_i $(i=1, 2)$, u, v を命題 43.6 におけると同様として

定義 43.6. $u\otimes v$ を $E_1\widehat{\otimes}_\varepsilon F_1$ から $E_2\widehat{\otimes}_\varepsilon F_2$ への (或は, $E_1\widehat{\otimes}_\pi F_1$ から $E_2\widehat{\otimes}_\pi F_2$ への) 連続線形写像に拡張したものを $u\widehat{\otimes}_\varepsilon v$ (或は $u\widehat{\otimes}_\pi v$) によって表わす.

E と F が共に完備なときには, $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ は完備であった (命題 42.3). この場合には, $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ は $\mathcal{B}_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ における $E\otimes F=B(E_\sigma', F_\sigma')$ の閉包と同一視することができる. 一般の場合, E と F が必ずしも共に完備とは限らぬときには, E' および F' の位相として $\hat{\sigma}$, すなわち $\sigma(E', \widehat{E})$, $\sigma(F', \widehat{F})$ を考えて見よう. $\hat{\sigma}$ は σ よりも細かいが, E' および F' の同等連続部分集合は, これらの空間をそれぞれ E および F の双対と考えても, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ の双対考えても同じになることに注意しよう[2]. これは, $B(E_\sigma', F_\sigma')\subseteq B(E_{\hat{\sigma}}', F_{\hat{\sigma}}')$, $\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')\subseteq\mathcal{B}(E_{\hat{\sigma}}', F_{\hat{\sigma}}')$ となり, かつ $\mathcal{B}(E_{\hat{\sigma}}', F_{\hat{\sigma}}')$ 上の ε-位相が, 他の三つの空間上にそれぞれの ε-位相を誘導することを意味している. かくして, $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ は $\mathcal{B}_\varepsilon(E_{\hat{\sigma}}', F_{\hat{\sigma}}')$ における $E\otimes F$ または $\widehat{E}\otimes\widehat{F}$ の閉包として, $\mathcal{B}_\varepsilon(E_{\hat{\sigma}}', F_{\hat{\sigma}}')$ の部分空間と見なすことができる. $E\otimes_\varepsilon F$ が $\widehat{E}\otimes_\varepsilon\widehat{F}$ において稠密なことは自明である.

---

1) $\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}=\mathbf{C}$ に注意せよ.

2) $\widehat{E}$ における 0 の閉凸平衡的近傍は, E の 0 の凸平衡的近傍の閉包, すなわち陪極として得られるから.

命題 43.7. E_i, F_i $(i=1, 2)$, u, v を命題 43.6 におけると同様とし，u（或は v）を E_1 から E_2 への（或は，F_1 から F_2 への）同形写像とする．
このとき，$u \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} v$ は $E_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} F_1$ から $E_2 \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} F_2$ への同形写像となる．

証　明　E から F への同形写像を連続性によって $\widehat{E}$ まで拡張したものは，$\widehat{E}$ から $\widehat{F}$ への同形写像である[1]．したがって，$u \otimes v$ が $E_1 \otimes_\varepsilon F_1$ から $E_2 \otimes_\varepsilon F$ への同形写像になることを示せばよい（これが連続単射であることは既知である；演習問題 39.3 参照）．さて，テンソル $\theta \in E_1 \otimes F_1$ を双線形形式 $\Phi \in B((E_1)_\sigma', (F_1)_\sigma')$ と同一視するならば，$(u \otimes v)(\theta)$ は形式

$$(x_2', y_2') \mapsto \Phi({}^t u(x_2'), {}^t u(y_2')) \tag{43.4}$$

と同一視される．そこで，U_1, V_1 をそれぞれ E_1, F_1 における 0 の任意の近傍とし，E_2, F_2 における 0 の閉凸平衡的近傍 U_2, V_2 をそれぞれ

$$u(U_1) \supseteq U_2 \cap u(E_1), \qquad v(V_1) \supseteq V_2 \cap v(E_2)$$

を満たすようにえらぶ．これらの式の両辺の極集合をとり，${}^t u$, ${}^t v$ が上への写像であること[2]を考慮することによって

$${}^t u^{-1}(U_1^0) \subseteq U_2^0 + \mathrm{Ker}\, {}^t u, \qquad {}^t v^{-1}(V_1^0) \subseteq V_2^0 + \mathrm{Ker}\, {}^t v$$

を得る[3]．すなわち

$$U_1^0 \subseteq {}^t u(U_2^0), \qquad V_1^0 \subseteq {}^t v(V_2^0)$$

---

1) ここでの同形写像とは，TVS 構造に関するものである．代数的同形写像で連続であっても，拡張したものが $\widehat{E}$ から $\widehat{F}$ への代数的同形写像になるとは限らない．

2) これは Hahn-Banach の定理に他ならない．

3) $u(U_1)^0 = {}^t u^{-1}(U_1^0)$ の**証明**：$x_2' \in u(U_1)^0 \Longleftrightarrow |\langle x_2', u(U_1)\rangle| \leqslant 1 \Longleftrightarrow |\langle {}^t u(x_2'), U_1\rangle| \leqslant 1 \Longleftrightarrow {}^t u(x_2') \in U_1^0 \Longleftrightarrow x_2' \in {}^t u^{-1}(U_1^0)$．　$(U_2 \cap u(E_1))^0 = U_2^0 + \mathrm{Ker}\, {}^t u$ の**証明**：まず，$x_2' \in U_2^0$ と $\tilde{x}_2' \in \mathrm{Ker}\, {}^t u$ を任意にとれば，$u(x_1) \in U_2$ となるすべての $x_1 \in E_1$ に対して，$|\langle x_2' + \tilde{x}_2', u(x_1)\rangle| = |\langle {}^t u(x_2' + \tilde{x}_2'), x_1\rangle| = |\langle {}^t u(x_2'), x_1\rangle| = |\langle x_2', u(x_1)\rangle| \leqslant 1$．これは，$(U_2 \cap u(E_1))^0 \supseteq U_2^0 + \mathrm{Ker}\, {}^t u$ を意味する．逆に，$x_2' \in (U_2 \cap u(E_1))^0$ を任意とり，その $u(E_1)$ への制限を f と書こう．U_2 をその閉単位球とするような E_2 上のセミノルムを $\mathfrak{p}$ と書けば，仮定の意味するところから，不等式 $|f(x_2)| \leqslant \mathfrak{p}(x_2)$ が $u(E_1)$ 上で成り立つ．したがって，Hahn-Banach の定理により，f の拡張となるような $z_2' \in E_2'$ が存在して，不等式 $|\langle z_2', x_2\rangle| \leqslant \mathfrak{p}(x_2)$ が E_2 全体で成り立つ．この不等式は $z_2' \in U_2^0$ を示している．ところで，x_2', z_2' は共に $u(E_1)$ 上で f に一致するから，すべての $x_1 \in E$ について $\langle x_2' - z_2', u(x_1)\rangle = 0$，すなわち $\langle {}^t u(x_2' - z_2'), x_1\rangle = 0$．これは ${}^t u(x_2' - z_2') = 0$ を意味する．したがって，$w_2' = x_2' - z_2'$ とおけば，$x_2' = z_2' + w_2' \in U_2^0 + \mathrm{Ker}\, {}^t u$．ゆえに $(U_2 \cap u(E_1))^0 \subseteq U_2^0 + \mathrm{Ker}\, {}^t u$．前後の包含関係と併せると，求める結果を得る．

が成り立つ. ゆえに, 形式 (43.4) が $U_2{}^0 \times V_2{}^0$ 上で一様に 0 に収束するならば, 明らかに Φ は $U_1{}^0 \times V_1{}^0$ 上で一様に 0 に収束する. (証終).

系. E_1, F_1 をそれぞれ E, F の線形部分空間とすれば, $E_1 \otimes_\varepsilon F_1$, $E_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon F_1$ はそれぞれ $E \otimes_\varepsilon F$, $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ の線形部分空間に標準的に同形である.

この系における同形は, TVS 構造の意味である.

さて, π-位相の方に移ろう. 局所凸空間 Hausdorff TVS E の双対は, E の完備化の双対と標準的に同一視し得るから, 命題 43.4 の系によって, 次の結果を得る.

命題 43.8. $E \widehat{\otimes}_\pi F$ の双対は, $B(E, F)$ に標準的に同形である.

写像

$$u \widehat{\otimes}_\varepsilon v : E_1 \widehat{\otimes}_\pi F_1 \to E_2 \widehat{\otimes}_\pi F_2$$

の転置は

$$\Psi \mapsto \{(x_1, y_1) \mapsto \Psi(u(x_1), v(y_1))\}$$

によって示される $B(E_2, F_2)$ から $B(E_1, F_1)$ への写像である.

このとき, 次の結果が成り立つ.

命題 43.9. E_i, F_i $(i=1, 2)$, u, v は命題 43.6 と同様とする. u (或は v) を E_1 (或は F_1) から E_2 (或は F_2) の稠密な線形部分空間の上への準同形写像とするならば, $u \widehat{\otimes}_\pi v$ は $E_1 \widehat{\otimes}_\pi F_1$ から $E_2 \widehat{\otimes}_\pi F_2$ の稠密な部分空間の上への準同形写像となる. 尚, この部分空間は, E_1 と F_1 が距離付け可能のときには, $E_2 \widehat{\otimes}_\pi F_2$ に一致する.

証　明　まず, 連続線形写像 $u : E \to F$ の像が稠密であるための必要十分条件は, ${}^t u$ が 1 対 1 になることであるという事実を利用する. $u(E_1)$, $v(F_1)$ がそれぞれ E_2, F_2 において稠密であるならば, $\Psi \in B(E_2, F_2)$ は恒等的に 0 でない限り $u(E_1) \times v(F_2)$ の上で 0 になり得ない. かくして ${}^t(u \widehat{\otimes}_\pi v)$ は 1 対 1

となり，したがって $u\,\hat{\otimes}_\pi\,v$ の像は稠密である.

いま，$\Phi\in B(E_1,\,F_1)$ 次の性質 : “$x_1\in \mathrm{Ker}\,u$ または $y_1\in \mathrm{Ker}\,v$ であれば $\Phi(x_1,\,y_1)=0$ となる” をもっていると仮定しよう. このとき，$u(E_1)\times v(F_1)$ 上の双線形汎関数Ψを

$$\Psi(u(x_1),\,v(y_1))=\Phi(x_1,\,y_1)$$

によって定義しよう. これがちゃんと定義になっていることは見易い. さて，U_1, V_1をそれぞれE_1, F_1における0の近傍であって

$$|\Phi(U_1,\,V_1)|\leqslant 1$$

となるものとする. このとき，E_2, F_2における0の近傍U_2, V_2を，$U_2\cap u(E_1)\subseteq u(U_1)$, $V_2\cap v(F_1)\subseteq v(V_1)$ となるようにえらべば[1]，$u(x_1)\in U_2$, $v(y_1)\in V_2$ に対して $|\Psi(u(x_1),\,v(y_1)|\leqslant 1$ が成り立つ. これは，Ψ が $E_2\times F_2$ からの誘導位相に関して連続なことを示している. したがって，Ψ は $E_2\times F_2$ 上の連続双線形形式に一意的に拡張できる[2]. この拡張されたものも，Ψ で示すことにしよう. ところで，Φ が $B(E,\,F)$ の一つの同等連続部分集合 H_1 に属するとすれば，近傍U_1, V_1 はH_1 だけに依存して，Φ には依らないようにえらべるから，U_2, V_2についても同様のことが言える. このとき，Ψ は

$$H_2=\{X\in B(E_2,\,F_2)\,;\,|X(U_2,\,V_2)|\leqslant 1\}$$

に属するが[3]，H_2は明らかに $B(E_2,\,F_2)$ の同等連続部分集合である. これらの事実から，求める結果がすべて出る. 実際，これらの事実から，${}^t(u\,\hat{\otimes}_\pi\,v)$ の像は，

$$\mathrm{Ker}\,u\times F_1+E_1\times \mathrm{Ker}\,v$$

の上で0となる $\Phi\in B(E_1,\,F_1)$ のなす集合にちょうど一致することがわかる. とくに，この像は弱閉である. さらに，この像に含まれる任意の同等連続部分集合は，$B(E_2,\,F_2)$ の同等連続部分集合の ${}^t(u\,\hat{\otimes}_\pi\,v)$ による像となる. したがって，補題 37.7 (演習問題 37.6) を適用しさえすればよい.

---

1) このようにえらべるのは，u, v が (TVS 構造の) 準同形であることによる.

2) これは，各変数毎に順次行ってもよいが，命題 43.4 と本命題の前段を用いてもできる.

3) たとえば，U_2, V_2 を開近傍にとっておけばよい.

もしE_1とF_1が距離付け可能ならば，$E_1 \otimes_\pi F_1$ も距離付け可能となり，したがって $E_1 \hat{\otimes}_\pi F_1$ は Fréchet 空間となる．その $(u \hat{\otimes}_\pi v)$ による像は $E_1 \hat{\otimes}_\pi F_1/\mathrm{Ker}(u \hat{\otimes}_\pi v)$ に同形であるから，像も Fréchet 空間となる．したがって，この像は完備であり，$E_2 \hat{\otimes}_\pi F_2$ の閉集合となる．ところで，証明の前段によって，この像は稠密であったから，それは $E_2 \hat{\otimes}_\pi F_2$ に一致する．(証終).

注意 43.1. $u : E_1 \to E_2$, $v : F_1 \to F_2$ が共に上への準同形写像であって，$u \hat{\otimes}_\pi v$ が上への写像にならない例を見つけるのは，難しくない[1].

注意 43.2. u と v が中への同形写像であっても，$u \hat{\otimes}_\pi v$ は一般には中への同形写像とは限らない．$u \hat{\otimes}_\pi v$ が中への同形写像になるための必要十分条件は，$B(E_1, F_1)$ の任意の同等連続部分集合が，$B(E_2, F_2)$ の同等連続部分集合の ${}^t(u \hat{\otimes}_\pi v)$ による像になることである．このことはまた，$u(E_1)$, $v(F_1)$ がそれぞれ E_2, F_2 において位相的補空間をもつことと同値になることが，証明できる．

注意 43.3. u と v が上への準同形写像であっても，$u \hat{\otimes}_\varepsilon v$ は一般には準同形写像にならない．注意 43.2 と比較するならば，$E \otimes F$ の ε–完備化と π–完備化とは，中への同形写像と準同形写像に関して，全く異った振舞をすることがわかる．また，命題 43.7 と 43.9 を見れば明らかなように，これらの二つの完備化が同形になるような場合には，線形写像のテンソル積 $u \otimes v$ の完備化への拡張は，便利な諸性質をもつであろうと考えられる．

最後に，E と F がノルム空間の場合について，若干述べておこう（これらの空間のノルム，それらの双対のノルム，また関連する連続線形写像のノルム等は，すべて$\| \;\; \|$で示す)．このとき，$E' \times F'$ 上の連続双線形形式の空間 $B(E', F')$ には標準的ノルムが存在する．すなわち，E' の閉単位球と F' の閉単位球の積集合上でのその形式の絶対値の最大値[2] をその形式のノルムとする．こ

---

1) たとえば，684 頁にある例を見よ．

2) 正確には，上限．すなわち $\|\Phi\| = \sup_{\|x'\| \leq 1,\, \|y'\| \leq 1} |\Phi(x', y')|$.

れによって，その各線形部分空間にノルムが誘導される．とくに，$\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma')$ [1] および $B(E_\sigma', F_\sigma') \simeq E \otimes F$ にもノルムが入る．

命題 43.10. 二つのノルム空間 E, F のテンソル積 $E \otimes F$ 上の ε-位相は，$B(F_\sigma', F_\sigma')$ 上の標準的ノルムによって定義される位相に一致する．

この証明は定義からただちに出る．$E \otimes F$ 上の ε-位相を定義するこのノルムを $\| \ \|_\varepsilon$ によって表わす．ところで，既に π-ノルムの概念は導入した．それは，E のノルムと F のノルムのテンソル積である (定義 43.3, 命題 43.2 参照) これは $\| \ \|_\pi$ で表わす．

E と F はノルム空間であるとしておいて，

命題 43.11. $E \times F$ から $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ および $E \hat{\otimes}_\pi F$ への標準的写像のノルムは 1 に等しい．

証　明　命題 43.1 によれば

$$\|x \otimes y\|_\pi = \|x\| \|y\|$$

が成り立つから，π-ノルムについてはよい．ε-ノルムについては，$E \otimes F$ を $B(E_\sigma', F_\sigma')$ と同一視すれば，$x \otimes y$ は双線形形式

$$(x', y') \mapsto \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle$$

と同一視されるから，

$$\|x \otimes y\|_\varepsilon = \sup_{\|x'\|=1} \sup_{\|y'\|=1} |\langle x', x \rangle \langle y', y \rangle| = \|x\| \|y\|$$

となるのでよい．

ノルム空間の場合には，命題 43.4 に述べた普遍性は，次のように精密化される．

命題 43.12. E, F を二つのノルム空間とするとき，次のことが成り立つ．

(a)　$E \otimes F$ 上のノルムであって，$E \times F$ から $E \otimes F$ への標準的双線形写

---

1)　E', F' は Banach 空間だから，$\mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma') \subseteq \mathcal{B}(E, F) = B(E, F)$ (定理 34.1 の系参照)．

像を連続にし，しかもこの写像のノルムを $\leqslant 1$ とするものは，すべて $\leqslant$ π-ノルム[1] となる．

(b) 任意のノルム空間 G に対して，$B(E, F; G)$ から $L(E\otimes_\pi F; G)$ の上への標準的同形写像は，等距離写像である．

(c) $B(E, F)$ から $E\otimes F$ の代数的双対 $(E\otimes F)^*$ への標準的線形写像が $B(E, F)$ から $(E\otimes F)'$ の上への等距離写像となるような $E\otimes F$ 上のノルムは，π-ノルムに等しい．

証　明 (b)⇒(a) なることはただちにわかる．実際，$\mathfrak{N}$ を $E\otimes F$ 上のノルムとして，標準的写像 $\phi: E\times F\to E\otimes_{\mathfrak{N}} F$ のノルムが $\leqslant 1$ となるとすれば，$G=E\otimes_{\mathfrak{N}} F$ として(b)を適用するとよい．このとき，ϕ に対応する写像 $E\otimes F\to G$ は恒等写像だから．

さて，(b)を証明しよう．$\tilde{u}\in B(E, F; G)$ と $u\in L(E\otimes_\pi F; G)$ が標準的に対応しているとすれば，すべての $x\in E$, $y\in F$ について

$$\|\tilde{u}(x, y)\|=\|u(x\otimes y)\|\leqslant\|u\|\ \|x\otimes y\|_\pi=\|u\|\ \|x\|\ \|y\|$$

が成り立つ．これは，$\|\tilde{u}\|\leqslant\|u\|$ を意味している．逆に，$\theta\in E\otimes F$, $\|\theta\|_\pi=1$ とすれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して分解 $\theta=\sum_j x_j\otimes y_j$ が存在して，$\sum_j\|x_j\|\ \|y_j\|\leqslant 1+\varepsilon$ となる．このとき，$\|u(\theta)\|=\|\sum_j \tilde{u}(x_j, y_j)\|\leqslant\|\tilde{u}\|(1+\varepsilon)$ を得るが，$\varepsilon\to 0$ とすることによって，$E\otimes_\pi F$ の単位球面上の $\|u(\theta)\|$ の上限は $\leqslant\|\tilde{u}\|$ となる．これが証明すべきことであった．

最後に(c)を証明する．$\mathfrak{N}$ を $E\otimes F$ 上のノルムとして，$B(E, F)$ が $E\otimes_{\mathfrak{N}} F)'$ と標準的に等距離的としよう．(b)によって，このことは $\mathfrak{N}=\pi$ のときには正しい．したがって，$E\otimes_\pi F$, $E\otimes_{\mathfrak{N}} F$ は共に $B(E, F)$ の同じ線形部分空間の上に等距離的に写像される (写像は：$E\otimes F\ni\theta\mapsto$ "点 θ における値"[2])．(証終)．

系 1. $B(E, F)$ から $(E\otimes_\pi F)'$ 上への標準的同形写像は等距離写像である．

1) すなわち，そのようなノルムを$\|\ \ \|$で示せば，任意の $\theta\in E\otimes F$ について $\|\theta\|\leqslant\|\theta\|_\pi$.

2) 求値写像 (evaluation map) のこと．

系 2. すべての $\theta \in E \otimes F$ について，$\|\theta\|_\varepsilon \leqslant \|\theta\|_\pi$ が成り立つ．

系 2 の証明 標準的双線形写像 $E \times F \to E \otimes_\varepsilon F$ は連続であり，そのノルムは 1 だから，命題 43.12 (a) を適用すればよい．

命題 43.13. E_i, F_i $(i=1, 2)$ を四つのノルム空間とし，$u : E_1 \to E_2$, $v : F_1 \to F_2$ を連続線形写像とする．このとき

$$\|u \otimes v\|_\pi = \|u \otimes v\|_\varepsilon = \|u\| \, \|v\|$$

が成り立つ．

証　明 ω を π または ε とするとき，すべての $x \in E_1$, $y \in F_1$ について

$$\|(u \otimes v)(x \otimes y)\|_\omega = \|u(x) \otimes v(y)\|_\omega = \|u(x)\| \, \|v(y)\|$$

が成り立つ (命題 43.11 参照)．ここで $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ として，$\|u(x)\|$, $\|v(y)\|$ がそれぞれ $\|u\|$, $\|v\|$ にいくらでも近い値をとるようにすれば，

$$\|u\| \, \|v\| \leqslant \|u \otimes v\|_\omega$$

を得る．

逆向きの不等式を証明しよう．まず $\omega = \pi$ として，$E_1 \times F_1$ から $E_2 \otimes_\pi F_2$ への双線形写像

$$(x, y) \mapsto u(x) \otimes v(y)$$

を考えれば，この写像のノルムは $\leqslant \|u\| \, \|v\|$ である．命題 43.12 (b) を適用すれば，この写像に対応する $E_1 \otimes_\pi F_1$ から $E_2 \otimes_\pi F_2$ への線形写像 $u \otimes v$ のノルムは $\leqslant \|u\| \, \|v\|$ でなければならない．

最後に，$\omega = \varepsilon$ の場合を考える．θ を $E_1 \otimes F_1$ の任意の元とすれば，その ε-ノルムは，(θ を $E_1' \times F_1'$ 上の双線形形式と見なしたときの) E_1', F_1' それぞれの単位球の積上での θ の絶対値の上限に等しい (命題 43.10)．ゆえに，$x' \in E_2'$, $y' \in F_2'$, $\|x'\| = \|y'\| = 1$ の上での上限を sup で示すならば，

$$\begin{aligned}\|(u \otimes v)(\theta)\|_\varepsilon &= \sup |(u \otimes v)(\theta)(x', y')| \\ &= \sup |\theta({}^t u(x'), {}^t v(y'))| \leqslant \|\theta\|_\varepsilon \|{}^t u\| \, \|{}^t v\| \\ &= \|\theta\|_\varepsilon \|u\| \, \|v\|\end{aligned}$$

を得る．(証終)．

演習問題

43.2. E_i, F_i $(i=1, 2)$, u, v を命題 43.6 におけると同様にする．このとき，$u \hat{\otimes}_\pi v$ の核は，$u(x_1)=0$ または $v(y_1)=0$ または両方が成り立つようなテンソル $x_1 \otimes y_1$ で張られる $E_1 \hat{\otimes}_\pi F_1$ の閉線形部分空間に等しいことを証明せよ．

43.3. 注意 43.2 との関連において，次の補題を証明せよ (これは補題 37.7 (演習問題 37.8) に対する補いと考えられる；この結果は後に利用する)．

補題 43.1. E, F を二つの Hausdorff 局所凸空間とする．このとき，連続線形写像 $u: E \to F$ が同形写像になるための必要十分条件は，E' の同等連続部分集合がすべて F' の同等連続部分集合の ${}^t u$ による像になることである．

43.4. E_i, F_i $(i=1, 2)$ を四つのノルム空間とし，$u: E_1 \to E_2$, $v: F_1 \to F_2$ を等距離写像とする．このとき，$u \otimes v$ が $E_1 \otimes_\pi F_1$ から $E_2 \otimes_\pi F_2$ への等距離写像になるための必要十分条件は，$E_1 \times F_1$ 上の連続双線形形式がすべて，$E_2 \times F_2$ 上の同じノルムをもつ連続双線形形式の ${}^t(u \hat{\otimes}_\pi v)$ による像になることである．このことを証明せよ．

43.5. 注意 43.2 を利用して，次のことを証明せよ．F を Banach 空間とし，E を F の閉線形部分空間であって，その陪双対 E'' において位相的補空間をもつものとする．このとき，標準的写像 $E \hat{\otimes}_\pi E' \to F \hat{\otimes}_\pi F'$ が (TVS 構造に関する) 同形写像になるための必要十分条件は，E が F において位相的補空間をもつことである．

43.6. 演習問題 43.4 を用いて，次のことを証明せよ．E, F をノルム空間とすれば，標準的写像 $E \hat{\otimes}_\pi F \to E'' \hat{\otimes}_\pi F$ は (中への) 等距離写像である．

43.7. E, F を Fréchet 空間とすれば，$E \hat{\otimes}_\pi F$ は樽型空間となることを証明せよ (ヒント：演習問題 33.4 を利用せよ)．

43.8. $\{E_\alpha\}$ を局所凸空間の族，F を局所凸空間とするとき，次の標準的同形を証明せよ．

$$\left(\prod_\alpha E_\alpha\right) \hat{\otimes}_\pi F \cong \prod_\alpha (E_\alpha \hat{\otimes}_\pi F).$$

44.

位相テンソル積の完備化の例．積 ε

例 44.1. 局所凸 Hausdorff 空間 E に値をもつ $\mathcal{C}^m$ 関数の空間 $\mathcal{C}^m(X;E)$ $(0 \leqslant m \leqslant +\infty)$

以下の議論においては，X は局所コンパクト位相空間として，m は 0 とするか，または X は $\mathbf{R}^n$ の開集合として，m は任意の整数または $+\infty$ とするかのどちらかである．空間 $\mathcal{C}^m(X;E)$ は，その自然な $\mathcal{C}^m$ 位相（定義 40.2 参照）をもっている．$m=0$ として，X を局所コンパクト空間であるとしても，その定義は有効である．すなわち，$\mathcal{C}^0(X;E)$ の位相は，X の各コンパクト集合上の一様収束の位相である．

命題 44.1. E が完備ならば，$\mathcal{C}^m(X;E)$ も完備である．

証 明 E は完備だから，$\mathcal{C}^m(X;E)$ 上の Cauchy フィルター $\mathcal{F}$ は各点毎に一つの関数 $f: X \to E$ に収束する．X は局所コンパクトだから，$\mathcal{F}$ の収束は各点の近傍において一様である（$\mathcal{F}$ の収束は X の各コンパクト集合上で一様だから．したがって，極限関数 f は連続となる．これで $m=0$ の場合は証明できた．さて，X を $\mathbf{R}^n$ の開集合として，$m>0$ としよう．このとき，grad f（grad = グラディエント[1]）が存在して連続関数となり，それが grad $\mathcal{F}$（意味は明らかであろう）の極限になっていることた示せば十分である．実際，そ

1) すなわち，$\mathrm{grad} f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$.

のときには，微分の階数に関する帰納法によって，容易に証明が完成するからである．さらに，記法の簡単のために，一変数の場合だけを扱ってもよいであろう．$n>1$ の場合への拡張は明らかだからである．

次のことを思い出そう（定理 27.1）．任意の $e'\in E'$ と任意の $\phi\in\mathcal{E}^m(X\,;E)$ について

$$(\partial/\partial x_1)\langle e',\phi(x)\rangle=\langle e',(\partial/\partial x_1)\phi(x)\rangle$$

が成り立つ．上と同様の議論によって，$(\partial/\partial x_1)\mathcal{F}$ は，X の各コンパクト集合上で一様に，一つの連続関数 f_1 に収束する．もちろん，$(\partial/\partial x_1)\langle e',\mathcal{F}\rangle$ は $\langle e',f_1\rangle$ に収束するから，複素数値連続関数 $\langle e',f_1\rangle$ は関数 $\langle e',f\rangle$ の導関数になることがわかる．このとき

$$\left\langle e',\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}-f_1(x)\right\rangle=\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h}\langle e',f_1(t)-f_1(x)\rangle\,dt$$

が成り立つ．ただし $h\neq 0$ である．そこで，U を E における 0 の閉凸平衡的近傍とし，e' を U の極 U^0 の任意の元としよう．f_1 の連続性によって，$|h|$ を十分小さくとれば，x_1 と x_1+h を結ぶ線分上のすべての t に $f_1(t)-f_1(x)\in U$ となる．このとき，右辺の被積分関数の絶対値は $\leqslant 1$ となり，したがって左辺の絶対値も $\leqslant 1$ となる．これは

$$h^{-1}\{f(x_1+h)-f(x_1)\}\in U+f_1(x)$$

を意味する．ゆえに f_1 は f の一階導関数に一致する．

系 1. X は無限遠において可算とし，E は Fréchet 空間とするならば，$\mathcal{E}^m(X\,;E)$ は Fréchet 空間である．

X が無限遠で可算（すなわち，コンパクト部分集合の可算個の合併になる）とし，E を距離付け可能とするならば，$\mathcal{E}^m(X\,;E)$ の位相の定義から，これが距離付け可能になることは明らかである[1)]．

系 2. X がコンパクト，E が Banach 空間のときには，$\mathcal{E}^0(X\,;E)$ にノル

1) すなわち，$\mathcal{E}^m(X\,;E)$ において，0 は近傍の可算基底をもつ．

ム

$$f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

を入れたものは，Banach 空間となる．

$\mathscr{C}^m(X; E)$ の元のうちで，その像が E の有限次元部分空間に含まれるような関数からなる部分空間を $\mathscr{C}^m(X) \otimes E$ で示す（命題 40.2 参照），$\mathscr{C}^m(X) \otimes E$ は $\mathscr{C}^m(X)$ と E のテンソル積となる．

$\phi \in \mathscr{C}^m(X) \otimes E$ として，$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ を E の一次独立なベクトルとし，これらが張る E の線形部分空間が ϕ の像た含むとする．このとき，すべての $x \in X$ について

$$\phi(x) = \phi_1(x)\mathbf{e}_1 + \cdots + \phi_d(x)\mathbf{e}_d$$

と書くことができる．ここで $\phi_1, \dots, \phi_d$ は複素数値関数である．これらの関数が m 回連続的微分可能になることは，

$$\phi_j(x) = \langle \mathbf{e}_j', \phi(x) \rangle$$

と書き表わして定理 27.1 を適用して見れば，直ちにわかる．ただし，$\mathbf{e}_j' \in E'$ は，

$$\langle \mathbf{e}_j', \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{jk} \text{ (Kronecker の記号)}$$

となるものである．また

$$\phi = \phi_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \cdots + \phi_d \otimes \mathbf{e}_d$$

と書くこともできる．

命題 44.2. X を局所コンパクト空間とするとき，$\mathscr{C}_c^0(X) \otimes E$ は $\mathscr{C}^0(X; E)$ において稠密である．

X が $\mathbf{R}^n$ の開集合のとき，$\mathscr{C}_c^\infty(X) \otimes E$ は $\mathscr{C}^m(X; E)$ において稠密である．

証明 1. X が局所コンパクト，$m = 0$ の場合．$f \in \mathscr{C}^0(X; E)$ として，p を E 上の連続セミノルム，K を X のコンパクト集合，ε を数 > 0 とする．このとき，X の相対コンパクト開集合による K の有限被覆 $U_1, \dots, U_r$ をえらんで，任意の $x, y \in U_j$ に対して

$$p(f(x) - f(y)) < \varepsilon$$

となるようにすることができる．ところで，コンパクト集合の一般的性質によって（例えば N. Bourbaki, "Topologie Générale" 参照)，上の被覆に従属する連続関数による1の分割が存在する．すなわち，X 上の r 個の連続関数 g_j ($1 \leqslant j \leqslant r$) が存在して，(a) 各 j について $\operatorname{supp} g_j \subseteq U_j$；(b) すべての $x \in K$ について $\sum_{j=1}^r g_j(x) = 1$ となる[1]．そこで，各 U_j から一点 x_j をえらぶならば，すべての $x \in K$ について $f(x) = \sum_{j=1}^r g_j(x) f(x)$ だから，

$$p\Big(f(x) - \sum_{j=1}^r g_j(x) f(x_j)\Big) \leqslant \sum_{j=1}^r g_j(x) p(f(x) - f(x_j)) \leqslant \varepsilon$$

これは，$x \in \operatorname{supp} g_j$ ならば $p(f(x) - f(x_j)) \leqslant \varepsilon$ となるからである．

証明 2. X が $\mathbf{R}^n$ の開集合，m は任意の場合．証明はいくつかの簡単な段階からなる．まず第一に，$\mathscr{E}_c{}^m(X;E)$ が $\mathscr{E}^m(X;E)$ において稠密なことを見よう．$\Omega_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ を単調増大な X の相対コンパクト開集合列で，その合併が X に一致するものとし，複素数値関数列 $g_\nu \in \mathscr{E}_c{}^\infty(X) (\nu = 1, 2, \ldots)$ を，g_ν は Ω_ν において1に等しいようにとる．このとき，各 $f \in \mathscr{E}^m(X;E)$ は $g_\nu f$ の $\nu \to \infty$ とするときの（$\mathscr{E}^m(X;E)$ における）極限となる．

次は，$f \in \mathscr{E}_c{}^m(X;E)$ として，$\rho_\varepsilon \in \mathscr{E}_c{}^\infty(\mathbf{R}^n)$ をいつもの軟化作用素（上巻 191 頁参照）とする，すなわち：$\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n ; |x| \leqslant \varepsilon\}$；$\int \rho_\varepsilon(x) dx = 1$．このとき，積分

$$\int \rho_\varepsilon(x-y) f(y) dy$$

は，($x \in \mathbf{R}^n$ 固定すれば) Riemann 和の極限として定義される．この Riemann 和は Cauchy フィルターを定義するから，E の完備化 $\hat{E}$ において収束する．x が動くとき，$\hat{E}$ に値をもつ x の関数を得るが，それを $\rho_\varepsilon * f$ で表わすのは自然であろう．これは $\mathscr{E}_c{}^\infty(X;E)$ の元であり，$\varepsilon \to 0$ のとき $\mathscr{E}^m(\mathbf{R}^n;\hat{E})$ において f に収束する．これらの事実は容易に検証できる．それは [値が] スカラーの場合の証明の繰り返しにすぎない．

証明の最終段階は，次のようにする．証明の第1の部分によって，f は関数

---

1) 各 j について $g_j(x) \geqslant 0$

列 $f_j \in \mathcal{C}_c{}^0(X) \otimes E$ の $\mathcal{C}^0$ 位相に関する極限である．切落し関数た用いれば[1]，f_j の台はすべて $\mathrm{supp}\, f$ の任意にあたえられた近傍 U に含まれると仮定してよい．このとき，任意の［固定された］$\varepsilon > 0$ に対して，$\rho_\varepsilon * f$ が $\rho_\varepsilon * f_j$ の $\mathcal{C}_c{}^\infty(\mathbf{R}^n\,;\,\hat{E})$ における極限になることた見るのは容易である．U を X の相対コンパクト開集合として，ε を十分小さくすれば，$\rho_\varepsilon * f_j$, $\rho_\varepsilon * f$ の台はすべて U に含まれると考えてよい[2]．このようにして，ε が十分小さければ，$\rho_\varepsilon * f_j$ は $\mathcal{C}_c{}^\infty(X) \otimes E$ に属することがわかり，$j \to \infty$ とすれば，$\rho_\varepsilon * f$ に $\mathcal{C}_c{}^\infty(X\,;\,\hat{E})$ において収束する．$\varepsilon \to 0$ とすれば，$\mathcal{C}^m(X\,;\,\hat{E})$ において $\rho_\varepsilon * f \to f$ となるから，これで証明は完成する．

定理 44.1. E が完備であれば，$\mathcal{C}^m(X\,;\,E) \cong \mathcal{C}^m(X)\,\hat{\otimes}_\varepsilon E$.

定理 44.1 に述べられている同形写像の意味は，次の通りである．$\mathcal{C}^m(X\,;\,E)$ はその線形部分空間 $\mathcal{C}^m(X) \otimes E$ 上に位相 ε を誘導する；したがって，後者から前者への自然単射は，$\mathcal{C}^m(X)\,\hat{\otimes}_\varepsilon E$ から $\mathcal{C}^m(X\,;\,E)$ の完備化の中への同形写像に拡張される；ところで，命題 44.1 により，$\mathcal{C}^m(X\,;\,E)$ は完備であり，$\mathcal{C}^m(X)\,\hat{\otimes}_\varepsilon E$ から $\mathcal{C}^m(X\,;\,E)$ への同形写像は，命題 44.2 により，上への写像となる．

定理 44.1 の証明　上に述べたことにより，$\mathcal{C}^m(X\,;\,E)$ が $\mathcal{C}^m(X) \otimes E$ 上に位相 ε を誘導することを示せば十分である．

まず，$\mathcal{C}^m(X\,;\,E)$ は $L(E_\tau'\,;\,\mathcal{C}^m(X))$ に標準的に埋め込まれることに注意しよう．実際，$f \in \mathcal{C}^m(X\,;\,E)$ に対して，X 上で定義される複素数値関数

$$x \mapsto \langle e', f(x) \rangle \tag{44.1}$$

を考えて見る．e' は E' の任意の元とする．この関数が $\mathcal{C}^m$ になることは既知である（定理 27.1 参照）．p を $|p| < m+1$ となる任意の n-系とし，K を X のコンパクト集合とすれば，x が K を動くとき，$(\partial/\partial x)^p f(x)$ は E の一つのコンパ

---

1) すなわち，$\mathrm{supp}\, f$ の近傍で 1 になり，あたえられた $\mathrm{supp}\, f$ の近傍 U に台が含まれる $\mathcal{C}_c{}^\infty$ 関数を掛けること．

2) 適当な切落し関数を用いて，$d(\mathrm{supp}\, f_j, \complement U) > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ となるようにしておけばよい．

クト集合 $\mathcal{K}$ の中にとどまる. さらに, E は完備だから, $\mathcal{K}$ の閉凸平衡包 $\Gamma(\mathcal{K})$ もコンパクトとなり[1], それはもちろん弱コンパクトである. したがって, $(1/\varepsilon)\Gamma(\mathcal{K})$ の極集合は E_τ' における 0 の近傍となるが, e' がこの集合に属するとき

$$\sup_{x\in k}|(\partial/\partial x)^p\langle e', f(x)\rangle| = \sup_{x\in k}|\langle e', (\partial/\partial x)^p f(x)\rangle| \leqslant \varepsilon$$

を得る. これは, 写像

(44.2) $$e' \mapsto (x \mapsto \langle e', f(x)\rangle)$$

が, E_τ' から $\mathcal{E}^m(X)$ への連続写像であることを意味している.

定理 44.1 の証明を完成するには, $\mathcal{E}^m(X; E)$ 上の $\mathcal{E}^m$ 位相が $L_\varepsilon(E_\tau', \mathcal{E}^m(X))$ からの誘導位相に等しいことを示せばよい. ところが, U を E の 0 の閉凸平衡的近傍とし, U^0 をその極集合, K を X のコンパクト集合, $p\in\mathbf{N}^n$ を $|p|<m+1$ とすれば, すべての $x\in K$ について $(\partial/\partial x)^p f(x)\in U$ ということは, すべての $x\in K$ とすべての $e'\in U^0$ について $|(\partial/\partial x)^p\langle e', f(x)\rangle|\leqslant 1$ と同値である. (証終).

演 習 問 題

44.1. E をノルム空間とし, そのノルムをで $\|\ \|$ 示す. K をコンパクト集合とするとき, $\mathcal{E}(K)\otimes E$ 上のノルム

$$f\mapsto \sup\|f(x)\|$$

は, その ε- ノルムに等しいことを証明せよ.

44.2. H, K を二つのコンパクト集合とするとき,

$$\mathcal{E}(H\times K)\cong\mathcal{E}(H)\widehat{\otimes}_\varepsilon\mathcal{E}(K)$$

となることを証明せよ. ここで, 同形写像は Banach 空間としての同形である.

44.3. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし, m を整数 $\geqslant 0$ または ∞ とする. E を局所凸 Hausdorff 空間とする. このとき, $\mathcal{E}^m(\Omega; E)$ は E に値をもつスカラー的に $\mathcal{E}^m$ の関数の空間, すなわち, 任意の $e'\in E'$ に対して $x\mapsto\langle e', f(x)\rangle$ が Ω 上の $\mathcal{E}^m$ 複素数値関数となるような関数 f のなす空間に一致することを証明せよ.

44.4. 開集合 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ で定義され, 局所凸 Hausdorff 空間 E に値をもつ関数 f であって, 各 $e'\in E'$ に対して関数 $x\mapsto\langle e', f(x)\rangle$ が $\mathcal{E}_c{}^m(\Omega)$ に属するもの全体がなす空

1) 命題 7.11 系参照.

間を $\tilde{\mathscr{E}}_c{}^m(\Omega\,;E)$ で表わす．E がノルム空間であれば，

$$\tilde{\mathscr{E}}_c{}^m(\Omega\,;E)=\mathscr{E}_c{}^m(\Omega\,;E)$$

となることを証明せよ．

44.5. 演習問題 44.4 の記号を用いるとき，

$$\tilde{\mathscr{E}}_c{}^\infty(\mathbf{R}^n\,;\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n))\neq\mathscr{E}_c{}^\infty(\mathbf{R}^n\,;\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n))$$

となることを証明せよ．

44.6. $f\in\mathscr{E}^\infty(\mathbf{R}^n\,;E)$ であって，複素係数をもつ n 変数の任意の二つの多項式 P,Q に対して，x が $\mathbf{R}^n$ を動くとき，$P(x)Q(\partial/\partial x)f$ が E の一つの有界集合の中にとどまるもの全体のなす空間を，$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n\,;E)$ で表わす．$\mathscr{S}(\mathbf{R}\,;E)$ にはその自然な位相，すなわち，任意の P と Q に対して，関数 $P(x)Q(\partial/\partial x)f$ の $\mathbf{R}^n$ 全体の上の一様収束の位相を入れる．このとき，E が完備ならば

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n\,;E)\cong\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$$

となることを証明せよ．

44.7. l_∞ を 0 に収束する複素数列全体からなる空間とし，これに l^∞ から誘導したノルム

$$\sigma=(\sigma_n)_{n=1,2,\ldots}\mapsto|\sigma|_\infty=\sup_n|\sigma_n|$$

を入れる．E を Banach 空間とし，そのノルムを $\|\ \ \|$ とする．このとき，$l_\infty\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ は，Banach 空間として，0 に収束する E の点列のなす空間にノルム

$$e=(e_n)\mapsto\sup_n\|e_n\|$$

を入れたものに，標準的に同形であることを証明せよ．

例 44.2. 局所凸 Hausdorff 空間における総和可能列

Banach 空間 l^1，すなわち，複素数列 $\sigma=(\sigma_n)\ (n=0,1,\ldots)$ であって

$$|\sigma|_1=\sum_{n=1}^\infty|\sigma_n|<\infty$$

となるもののなす空間 (11 章例 IV) に関する若干の結果が，ここで必要になる．

l^1 の部分集合 $\sum$ が**無限遠において同等減少** (equismall at infinity) であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，整数 $n_\varepsilon>0$ が存在して

$$\text{すべての } \sigma \in \Sigma \text{ について } \sum_{n \geq n_\varepsilon} |\sigma_n| < \varepsilon$$

となることを云う．

l^1 の双対は l^∞ であることを思い出そう（定理 20. 1）． 次の結果を利用する．

定理 44.2. 点列 $S \subseteq l^1$ に関する次の二条件は，同値である．

(a) S は弱収束する（すなわち，位相 $\sigma(l^1, l^\infty)$ に関して収束する）．

(b) S は収束する（l^1 のノルムに関して）．

l^1 の部分集合 K に関する次の三条件は，同値である．

(a_1) K は弱コンパクト

(b_1) K はコンパクト

(c_1) K は有界，閉，かつ無限遠において同等減少．

証明 まず，l^1 における弱収束列 S は，無限遠において同等減少であることを示そう．S は 0 に弱収束すると仮定してよい．帰謬法によって証明しよう．いま，数 $c > 0$ と単増に増大する整数列 $n_k (k = 1, 2, \ldots)$ が存在し，また S の元の列 $\{\sigma^{(k)}\}$ が存在して，すべての k について

$$\sum_{n \geqslant n_k} |\sigma_n{}^{(k)}| \geqslant c$$

が成り立つと仮定しよう．このとき，各 k に対して，整数 $n_k' > n_k$ を

$$\sum_{n \leqslant n'_k} |\sigma_n{}^{(k)}| < c/4$$

となるようにえらぶ．次に，整数列 $k_\nu \to \infty$ を次のように構成する：$k_1 = 1$ として，k_2 は次の条件を満たす整数とする

(i) $$\sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n'_1} |\sigma^{(k_2)}| < c/4 \text{ ; (ii) } n_1' < n_{k_2} \text{ ;}$$

以下同様にして；k_ν は整数であって

(i) $$\sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n'_{k_{\nu-1}}} |\sigma^{(k_\nu)}| < c/4 \text{ ; (ii) } n'_{k_{\nu-1}} < n_{k_\nu}$$

となるものとする．これら二条件は，ν に関する帰納法によって，満たすようにできる．なぜなら，$k \to \infty$ のとき $n_k \to \infty$ であり，l^1 に属する列からなる

列 S が 0 に弱収束するということから，各 n に対して $\sigma_n^{(k)}$ は $[k\to\infty$ のとき$]$ 0 に収束するからである.

記号の簡単のために，k_ν の代りに ν と書こう．したがって，$\sigma^{(k_\nu)}$ の代りに $\sigma^{(\nu)}$；n_{k_ν}, n'_{k_ν} の代りに n_ν, n_ν' と書く．こうすれば，すべての $\nu>1$ に対して [1]，

$$\sum_{n_1\leqslant n\leqslant n'_{\nu-1}}|\sigma_n^{(\nu)}|<c/4\,;$$

$$n'_{\nu-1}<n_\nu \quad \text{かつ} \qquad \sum_{n_\nu\leqslant n<n'_\nu}|\sigma_n^{(\nu)}|>3c/4\,;$$

$$\sum_{n'_\nu\leqslant n}|\sigma_n^{(\nu)}|<c/4$$

を得る．このとき，数列 $\tau=(\tau_n)$ を次のように定義しよう．

$$\tau_n=\begin{cases}\overline{\sigma_n^{(\nu)}}/|\sigma_n^{(\nu)}| & (n\leqslant n<n_\nu',\ \text{かつ}\ \sigma_n^{(\nu)}\neq 0\ \text{のとき}),\\ 0 & (\text{その他のとき}).\end{cases}$$

そうすれば，簡単な計算からすぐわかるように，すべての $\nu>1$ に対して

$$|\langle\tau,\sigma^{(\nu)}\rangle|\geqslant\sum_{n_\nu\leqslant n<n'_\nu}|\sigma_n^{(\nu)}|-c/2>c/4$$

を得るが，これは $\sigma^{(\nu)}$ が 0 に弱収束できないことを意味している．これで最初の主張が証明された.

さて，(a) ⇒ (b) を証明しよう．ここでも，S は 0 に弱収束すると仮定してよい．最初に証明したことによって，これは，任意の $\varepsilon>0$ に対して整数 $n_\varepsilon\geqslant 0$ が存在して，すべての $\sigma\in S$ について

$$\sum_{n>n_\varepsilon}|\sigma_n|\leqslant\varepsilon$$

が成り立つことを意味する．他方，σ が S の中を動くとき [2]，各 n に対して $\sigma_n\to 0$ である．したがって，S の有限部分集合 A が存在して，$\sigma\in S$, $\sigma\notin A$ に対して

1) ‘とびとびの ν のすべてに対して’ と読んでもよいし，S の部分列をあらためてSと書いたと思って，‘すべての ν に対して’ と考えてもよい.

2) この言い方は不正確であるが，要するに S は列だから，$S=\{\sigma^{(\nu)};\nu=1,2,\ldots\}$ として，$\nu\to\infty$ とするの意.

$$\sum_{n<n_\varepsilon} |\sigma_n| < \varepsilon$$

が成り立つ．結局，$\sigma \in S, \sigma \notin A$ に対して，$|\sigma|_1 < 2\varepsilon$ を得る．これは，S がノルムの意味で 0 に収束することを示している．

今度は $(a_1) \Rightarrow (b_1)$ を証明しよう．示すべきことは，K の任意の点列が，ノルムに関して収束する部分列を含むことである．ところで，S は K において弱収束する列を求むから[1]，(a) ⇒ (b) を考慮に入れれば十分である．

次に，K がコンパクトであれば，K は無限遠において同等減少であることを証明しよう．もし K が無限遠において同等減少でないならば，数 $c>0$ と K の点列 $\{\sigma^{(\nu)}\}$ が存在して

$$\sum_{n\geqslant\nu} |\sigma_n{}^{(\nu)}| \geqslant c$$

が成りたつ．そうすれば，この列 $\{\sigma^{(\nu)}\}$ は収束する部分列を含みえない．

最後に $(c_1) \Rightarrow (b_1)$ を証明しよう．S を K に含まれる任意の点列とする．K は無限遠において同等減少であるから，整数列 $0 < n_1 < n_2 < \cdots n_k < \cdots$ が存在して，すべての k とすべての $\sigma \in S$ に対して

$$\sum_{n\geqslant n_k} |\sigma_n| < 1/k \tag{44.3}$$

となる．K は有界だから，S の部分列 $S^{(1)}$ が存在して，$\sigma^{(1)}$ が $S^{(1)}$ の中を動くとき[2]，すべての $n < n_1$ について $\sigma_n{}^{(1)}$ は或る複素数 σ_n に収束する；次に $S^{(1)}$ から部分列 $S^{(2)}$ をえらんで，$\sigma^{(2)}$ が $S^{(2)}$ の中を動くとき，すべての $n < n_2$ について $\sigma_n{}^{(2)}$ は或る複素数 σ_n に収束する等々．このようにして定義される数列 (σ_n) を σ で表し，各 $S^{(k)}$ から数列 $\tau^{(k)}$を，$|\tau_n{}^{(k)} - \sigma_n| < 1/k$ がすべての $n < n_k$ について成り立つようにえらぶ．このとき，$\{\tau^{(k)}\}(k=1, 2, \ldots)$ が l^1 における Cauchy 列になることは，直ちにわかる（ノルムに関する Cauchy 列；(44.3) を考慮せよ）．K は閉集合だから，それはに K おいて収束する（もちろん，その極限は数列 σ である；かくして σ は l^1 に属する）．（証終）．

---

1) K の弱コンパクト性からこのことの出るのは自明ではない．いわゆる Šmulian の定理による．これについては，訳者あとがきの定理 B.1.3 参照．

2) 前頁脚注 2 参照

定理 44.2から出る次の結果が入用となる.

補題 44.1. l^1 の恒等写像は, l^1 の各コンパクト集合上の一様収束位相に関して, その像が有限次元になる連続線形写像列の極限となる.

証　明　番号が $\leqslant n$ の項はすべて1に等しく, その他の項はすべて0となる数列 $1_{(n)}$ を掛けることによって得られる [l^1 における] 写像を ϕ_n で表わす. $\sigma \in l^1$ とすれば, $\phi_n(\sigma)$ の各項は, その番号が $>n$ ならば0に等しく, その他のときは σ の同じ番号の項に等しい数列である. ϕ_n が l^1 からそれ自身への連続線形写像であり, その像が有限次元になることは明らかである. また, 無限遠において同等減少となる l^1 の各部分集合上で, 一様に $\phi_n \to I$ となることも明らかである. (証終).

さて, E を局所凸 Hausdorff 空間とするとき, 定理 44.2から導かれる結果として

補題 44.2. E' に弱位相 $\sigma(E', E)$ を入れ, l^1 に位相 $\sigma(l^1, l^\infty)$ を入れたとき, 線形写像 $u: E' \to l^1$ が連続になるならば, u は E' の同等連続部分集合を l^1 の相対コンパクト集合に写す.

証　明　$A' \subseteq E'$ が同等連続ならば, それは相対弱コンパクトであり, したがって $u(A')$ は相対コンパクトとなる. よって, 定理 44.2により, 結果を得る.

線形写像 $u: E' \to l^1$ が**弱連続** (weakly continuous) であるとは, E' に弱位相 $\sigma(E', E)$ を入れ, l^1 に位相 $\sigma(l^1, l^\infty)$ を入れたときに連続なことを云い; また, 線形写像 $v: l^\infty \to E$ が弱連続とは, l^∞ に $\sigma(l^\infty, l^1)$ を入れ, E に $\sigma(E, E')$ を入れたときに連続になることを云うことにしよう[1].

補題 44.3. v を線形写像 $l^\infty \to E$ とするとき, 次の二条件は同値である.

1) これらの用語はここだけのことであって, 一般の用語とは異なるから, 注意を要する. 一般用語で弱連続とは, 命題 35.8の結論の成り立つことを言う. それに従えば, l^∞ には $\sigma(l^\infty, (l^\infty)')$ を入れることになるが, それは $\sigma(l^\infty, l^1)$ とは違う.

(a)　v は弱連続である．

(b)　v は或る弱連続線形写像 $u: l^1 \to E'$ の転置である．

また，v がこれらの条件を満たすとき，l^∞ の単位球 B の v による像は，E のプレコンパクト集合となる[1]．

証　明　(a) と (b) が同値になるのは，単に連続線形写像の転置は連続だということによる[2]．(b) から，$u(B)$ がプレコンパクトになることを示そう．

V を E における 0 の閉凸平衡的近傍としよう．V の極 V^0 は E' において弱コンパクトだから，$u(V^0)$ は l^1 において［弱コンパクトであり，したがって定理 44.2 により］コンパクトとなる．ゆえに，V^0 の点の有限集合 $y_1', \dots, y_s$ が存在して，任意の $y' \in V^0$ に対して整数 j, $1 \leqslant j \leqslant s$ があって，

$$|u(y') - u(y_j)|_1 \leqslant 1/4 \tag{44.4}$$

が成りたつ．他方，Banach-Steinhaus の定理（定理33. 2）によって，l^∞ の単位球は $\sigma(l^\infty, l^1)$ に関して相対弱コンパクトである．したがって，B の有限個の点 $x_1, \dots, x_r$ が存在して，任意の点 $x \in B$ に対して i, $1 \leqslant i \leqslant r$ があって，

$$\sup_{1 \leqslant j \leqslant s} |\langle x - x_i,\ u(y_j') \rangle| \leqslant 1/4 \tag{44.5}$$

が成り立つ．さて，$x \in B$, $y' \in V^0$ を任意とするとき，添字 i を (44.5) が成りたつようにえらび，添字 j を (44.4) をが成り立つようにえらぶ．ところで不等式

$$|\langle x - x_i,\ u(y') \rangle| \leqslant |\langle x - x_i,\ u(y_j') \rangle| + |\langle x - x_i,\ u(y') - u(y'_j) \rangle|$$

が成り立つが，$x - x_i \in 2B$ だから

$$|\langle x - x_i, u(y') - u(y_j') \rangle| \leqslant 1/2$$

となり[3]，したがって (44.5) から

$$|\langle x - x_i,\ u(y') \rangle| \leqslant 1$$

を得る．これは［$v = {}^t u$ だから］$v(x) - v(x_i) \in V = V^{00}$ を意味する．ゆえに $v(x) \in V + v(x_i)$．かくして，$v(B)$ は有限個の集合 $V + v(x_i)(1 \leqslant i \leqslant r)$ によ

1)　この命題の証明につづく注意と，その脚注（次頁）参照．

2)　命題35.1系参照．

3)　$|\langle x - x_i,\ u(y') - u(y_j') \rangle| \leqslant |x - x_i|_\infty |u(y') - u(y_j')|_1 \leqslant 2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

って覆われる．したがって，命題6.9により，$v(B)$ はプレコンパクトである．(証終)．

もちろん，E が完備なときには，$v(B)$ は相対コンパクト（すなわ $\overline{v(B)}$ がコンパクト）になる[1]．

次のことに注意しよう．u が弱連続とすれば，それは $E_\tau{}'$ から l^1 への写像として連続である(命題42.2)．このとき，u は有限次元の像をもつ連続線形写像列の $L_\varepsilon(E_\tau{}'\,;\,l^1)$ における極限となる．実際，補題44.1の証明における記号を用いるならば，写像の列 $\phi_n\circ u(n=1,2,\ldots)$ をとれば十分である．なぜなら，A' を E' の同等連続部分集合とすれば，補題44.2により，$u(A')$ は l^1 の相対コンパクト集合となる．したがって，補題44.1により，ϕ_n は $u(A')$ 上で一様に l^1 の恒等写像に収束する．これは，$\phi_n\circ u$ が A' 上で一様に u に収束することを意味している．(証終)．

上に述べたことの結果として，E が完備ならば，

(44.6)
$$l^1\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E\cong L_\varepsilon(E_\tau{}'\,;\,l^1)$$

が成り立つ．

次に進むための段階として，弱連続写像 $u:E'\to l^1$（或は，同値であるが，弱連続写像 $v:l^\infty\to E$）と E における**総和可能列**との対応を示そう．

定義 44.1. TVS E における列 $\{x_n\}$ が **可総和** または **総和可能** (summable) であるとは，E における0の任意の近傍 V に対して，整数 n_V が存在して，整数 $n\geqslant n_V$ からなるすべての有限集合 J について

$$\sum_{n\in J}x_n\in V$$

が成り立つことを云う．

$\{x_n\}$ が TVS E における可総和列ならば，その部分和の列

1) 実は，E が完備でなくても，$v(B)$ は E でコンパクトである．実際，B を l^∞ の閉単位球とすれば，B は $\sigma(l^\infty,l^1)$ コンパクトであり，v は弱連続だから，$v(B)$ は $\sigma(E,E')$ コンパクト．よって，$v(B)$ は（E の完備化）$\widehat{E}$ においても $\sigma(\widehat{E},E')$ に関してコンパクト，したがって $\sigma(\widehat{E},E')$-閉．よってもちろん $\sigma(\widehat{E},\widehat{E}')$-閉．ゆえに $v(B)$ は $\widehat{E}$ の強位相に関しても閉となる．

$$\sum_{n\leq p} x_n (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

は Cauchy 列をなす．したがって，E が完備ならば，それは収束する．それが収束するとき，その極限を

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

によって表わす[1]．

E におけるすべての列，すなわち，非負整数の集合 $\mathbf{N}$ から E へのすべての写像からなる空間は，E におけるすべての可総和列の集合に線形構造を誘導する．この集合には位相を入れないでおく．

1.　$v: l^\infty \to E$ を弱連続線形写像する．e_n によって，n 番目の項は1に等しく，その他の項はすべて0に等しい数列を表わそう．このとき，$x_n = v(e_n)$ とおく．点列 (e_n) $(n = 0, 1, \ldots)$ は l^∞ において弱可総和である[2]．したがって，点列 (x_n) は E において弱総和可能となる．ところで，部分和

$$\sum_{n\in J} e_n \ (J: 整数 \geqslant 0 の有限集合)$$

はすべて l^∞ の単位球 B に属する．補題44.3によって，$u(B)$ は E のプレコンパクトな集合となる[3] それを A とかけば，A の $\hat{E}$ における閉包 $\hat{A}$ はコンパクトとなり，$\hat{A}$ 上では弱位相 $\sigma(\hat{E}, E')$ と E（始位相を入れた）の完備化としての $\hat{E}$ の位相は一致する．かくして，列 $\{x_n\}$ は $\hat{E}$ において総和可能であり，したがって E において総和可能である[4]．

このようにして，l^∞ から E への弱連続線形写像の各々に対して，E における可総和列が対応する．

2.　逆に，(x_n) を E における可総和列としよう．E は完備であると仮定しておく．このとき

---

1)　この極限が，項の順序付けに無関係なことは，容易にわかる．そこで $\sum x_n$ は**無条件収束級数**とよばれることがある．

2)　すなわち，l^∞ に位相 $\sigma(l^\infty, l^1)$ を入れたとき，可総和．

3)　実は，$u(B)$ はコンパクト（B：閉単位球）（前頁脚注参照）．

4)　その和は，各項が1に等しい l^∞ の元 $e_\infty = (1, 1, 1, \ldots)$ の v による像，$v(e_\infty)$ に等しい．

$$v:(\tau_n)\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n x_n$$

は，弱連続線形写像 $l^\infty\to E$ になることを云おう．まず，v が実際に l^∞ から E への写像になっていることを示す．必要ならば，各 τ_n をその実部と虚部に分けることによって，各 τ_n が実数と仮定して証明すればよい[1]．さらに．各 τ_n を $\sup|\tau_n|$（これは $\neq 0$ の場合だけ考えればよい）によって割ることにより，$|\tau_n|\leqslant 1$ がすべての n について成りたつとしてよい．J を整数 $\geqslant 0$ からなる任意の有限集合として，$\sum_J$ を有限列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\in J}$（各 $n\in J$ について $\varepsilon_n=\pm 1$）全体のなす（有限）集合とする．任意の列 $(\sigma_n)_{n\in J}$ を，J の元の個数と同じ次元をもつユークリッド空間に，自明な標準的仕方で埋め込むならば，すべての $n\in J$ について $|\sigma_n|\leqslant 1$ となる列 $(\sigma_n)_{\sigma\in J}$ はすべて $\sum_J$ の凸包に属する．これは，（超）立方体はその頂点の凸包に等しい，というのと同じである．とくに，有限列 $(\tau_n)_{n\in J}$ は $\sum_J$ の凸包に属する．

いま，p を E 上の連続セミノルムとし，ε を数 >0 とする．列 (x_n) は総和可能だから，整数 $n_\varepsilon>0$ をえらんで，整数 $n\geqslant n_\varepsilon$ からなる任意の有限集合 J について

$$p\left(\sum_{n\in J}x_n\right)\leqslant\varepsilon/2$$

とできる．このとき，$\sum_J$ に属する有限列 (ε_n) をとれば，

$$p\left(\sum_{n\in J}\varepsilon_n x_n\right)\leqslant p\left(\sum_{n\in J,\varepsilon_n=+1}x_n\right)+p\left(\sum_{p\in J,\varepsilon_n=-1}x_n\right)\leqslant\varepsilon$$

を得る．これから直ちに，求める結果が得られる[2]．

次に，写像 v が弱連続であることを，示さねばならない．そのためには，任意の $x'\in E'$ に対して，数列 $\{\langle x',x_n\rangle\}$ $(n=0,1,\ldots)$ が l^1 に属することを示せば十分である[3]．ところで，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$n_\varepsilon\geqslant 0$ が存在して，整数 $n\geqslant n_\varepsilon$ からなるすべての有限集合 J について

1) すなわち $\sum(\mathrm{Re}\,\tau_n)x_n$, $\sum(\mathrm{Im}\,\tau_n)\,x_n$ を別々に論ずればよい．

2) すなわち，$\{\tau_n x_n\}$ が総和可能となり，したがって $\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n x_n$ が E において収束すること〔すなわち，v が定義できること〕．

3) $\langle x',v((\tau_n))\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n\langle x',x_n\rangle$ よりただちにわかる．

$$\left|\sum_{n\in J}\langle x', x_n\rangle\right| \leqslant \varepsilon$$

となることは，明らかである．そこで，J として，整数 $n \geqslant n_\varepsilon$ からなる有限集合であって，すべての $n \in J$ ついて $\mathrm{Re}\,\langle x', x_n\rangle \geqslant 0$ となる任意のものをとり；ついで，すべての $n \in J$ について $\mathrm{Re}\,\langle x', x_n\rangle \leqslant 0$ なるものをとり；同じことを $\mathrm{Im}\langle x', x_n\rangle$ についても行うならば，求める結論に到達する．

結局は，各 n について $v(e_n) = x_n$ であることがわかり，写像 $(x_n) \mapsto v$ は，1 において導入した写像 $v \mapsto (x_n)$ の逆写像になることがわかる．これらのことをまとめて

定理 44.3. E を完備局所凸 Hausdorff 空間とするとき，

$$(x)_{n\in\mathrm{N}} \mapsto \left((\tau_n)_{n\in\mathrm{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n x_n\right)$$

は，E における可総和列の空間から，l^∞ から E への弱連続線形写像の空間の上への1対1線形写像である[1]．

後者の空間は $L(E_\tau' ; l^1)$ に標準的に同形であるが，これに E' の各同等連続集合上の一様収束の位相を入れたものは，(TVS 構造に関して) $l^1 \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ に同形である．

このようにして，$l^1 \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ は，E における総和可能列の空間と同一視できる．

演 習 問 題

44.8. 定理 44.2 を用いて，l^1 と l^∞ の回帰的でないことを証明せよ．

44.9. $\mathbf{R}^n$ 上の Lebesgue 測度を dx とし，$L^p\,(1 \leqslant p < \infty)$ を $|f|^p$ が Lebesgue 可積分な関数 f (の同値類) のなす空間とする．このとき，L^p の部分集合 A がコンパクトであるための必要十分条件は，A が次の三性質を有することであることを証明せよ．

(i) A は L^p において有界 (L^p ノルムの意味) である．

(ii) A は無限遠において同等減少である，すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\rho > 0$ が存在して，すべての $f \in A$ について

1) E が完備でないときには，‘可総和列’を‘収束する可総和列’でおきかえればよい．

$$\int_{|x|>\rho}|f(x)|^p\,dx<\varepsilon$$

が成り立つ.

(iii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\eta>0$ が存在して, $|a|\leqq\eta$ となるすべての $a\in\mathbf{R}^n$ とすべての $f\in A$ について

$$\int|f(x-a)-f(x)|^p\,dx\leqq\varepsilon$$

が成り立つ.

45.

位相テンソル積の完備化の例 Fréchet 空間の完備 π-積

局所凸 Hausdorff 空間 E における絶対可総和列の定義を述べよう.

定義 45.1. E における点列 $\{z_n\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ が**絶対可総和**または**絶対的に総和可能** (absolutely summable) であるとは, E 上の任意の連続セミノルムに対して, 非負数列 E $\{p(z_n)\}$ が可総和になることをを云う.

絶対可総和列 (z_n) は可総和である (定義 44.1). E が完備ならば, その部分和 $\sum_{n<p} z_n$ は, $p\to\infty$ のとき収束する. その極限 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は, **絶対収束級数** (absolutely convergent series) と呼ばれる[1].

さて, 主定定理を述べよう.

定理 45.1. E, F を二つの Fréchet 空間とすれば, 任意の元 $\theta\in E\hat{\otimes}_\pi F$ は絶対収束級数の和

$$\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n x_n\otimes y_n \tag{45.1}$$

として表わされる. ここで, (λ_n) は $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|<1$ となる複素数例であり, (x_n), (y_n) はそれぞれE, F において 0 に収束する点列である.

種々の応用上からは, 定理 45.1 を強めた形のものが重要である.

定理 45.2. E, F を Fréchet 空間とし, U, V をそれぞれ E, F における 0 の凸平衡的開近傍とする.

---

1) むしろ, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ と書かれた形式が級数で, その極限は和とよぶ.

このとき，K_0 を $U\otimes V$ の $E\hat{\otimes}_\pi F$ における閉凸平衡包の内部[1] に含まれるコンパクト部分集合とすれば，l^1 の単位球のコンパクト部分集合 K_1 と，それぞれ U, V に含まれ E, F において 0 に収束する点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が存在して，すべての $\theta\in K_0$ について (45.1) が適当な $(\lambda_n)\in K_1$ に対して成り立つ．

定理 45.2 の証明　集合 $E\times F$ 上の複素数値関数 f であって，E, F 上のすべての連続セミノルム $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ に対して

$$\|f\|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = \sum_{(x,y)\in E\times F} |f(x,y)|\mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(x) < +\infty$$

となるもの全体のなす空間を $\mathcal{X}_1$ で表わそう．空間 $\mathcal{X}_1$ は $E\times F$ 上の関数のうちで台が有限集合となるもの全体のなす空間を含む．定理 39.1 の証明におけると同様に，この後者の空間を $\mathcal{X}$ で表わす．セミノルム $\|\ \|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ の全体は，$\mathcal{X}_1$ 上に一つの局所凸位相を定義するが，この位相は明らかに Hausdorff でない．なぜなら，これらのセミノルムはすべて，線形部分空間

$$M_1 = \{f\in\mathcal{X}_1\,;\, x\neq 0,\, y\neq 0 \text{ ならば } f(x, y) = 0\}$$

の上で 0 になるからである．実際，E と F が Hausdorff のときには，すべてのセミノルム $\|\ \|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ の核の共通部分が，ちょうど M_1 に一致する．したがって，$\mathcal{X}_1$ に付随する Hausdorff 空間は，$T=(E-\{0\})\times(F-\{0\})$ 上の複素数値関数[2] からなる空間と標準的に同一視できる．この空間を Λ_1 で表わす (T 上で台が有限集合となる関数全体の空間を Λ で表わす)．E において $\operatorname{Ker}\mathfrak{p}$ の余集合を $\operatorname{supp}\mathfrak{p}$ で示そう．$\mathfrak{q}$ に対しても同様にする．$f\in\Lambda_1$ とするとき，$f(x, y)\neq 0$ となる点 $(x, y)\in T$ の集合を $\operatorname{supp} f$ によって示す (この定義は，$E-\{0\}$, $F-\{0\}$ および T に離散位相を入れて考えれば，普通の定義と一致する)．$\|f\|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} < +\infty$ ということから，$\operatorname{supp} f$ と $(\operatorname{supp}\mathfrak{p})\times(\operatorname{supp}\mathfrak{q})$ との交わりは，たかだか可算集合になることが導かれる．また，任意の $n=1, 2,\ldots$ に対して，有限集合を台とする関数 f_n が存在して，$\|f-f_n\|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\leqslant 1/n$ となることも明らかである．

---

1) すなわち，$E\hat{\otimes}_\pi F$ の部分集合 $\{\theta\,;\,(\mathfrak{p}_0\hat{\otimes}\mathfrak{q}_0)(\theta) > 1\}$ のこと．ただし，$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0$ はそれぞれ U, V のゲージであり，$\mathfrak{p}_0\hat{\otimes}\mathfrak{q}_0$ は $E\otimes_\pi F$ 上のセミノルム $\mathfrak{p}_0\otimes\mathfrak{q}_0$ の $E\hat{\otimes}_\pi F$ への拡張である．

2) $\|f\|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} < +\infty$ となるもの．

すなわち，Λ は Λ_1 において稠密である．

さて，Λ から $E\otimes F$ の上への標準写像が存在する．すなわち，写像

$$f \mapsto \sum_{(x,y)\in T} f(x,\ y)x\otimes y \tag{45.2}$$

である．π-位相の定義によって，この写像は Λ（位相はセミノルム $\|\ \|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ の族によるもの）から $E\otimes_\pi F$ の上への準同形写像となる[1]．

今までは，E と F が Fréchet 空間であることを未だ利用していなかった．E, F は共に距離付け可能だから，Λ_1 も距離付け可能となる．これは，$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ と $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ をそれぞれ E および F 上の連続セミノルムとするとき，$\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{p}'$ かつ $\mathfrak{q}\leqslant\mathfrak{q}'$ であれば，すべての $f\in\Lambda_1$ について，$\|f\|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}'}$ となるということの，自明な結果である[2]．さらに，各 $f\in\Lambda_1$ の台は可算集合である．実際，$(\mathfrak{p}_k), (\mathfrak{q}_k)$ をそれぞれ E, F 上の連続セミノルムの可算基底とするとき，各 k について f の台と $(\mathrm{supp}\,\mathfrak{p}_k)\times(\mathrm{supp}\,\mathfrak{q}_k)$ の共通部分は可算集合だから，f の台は可算集合の可算族の合併集合となるからである．E, F が距離付け可能なことから来るもう一つの結果は，Λ_1 が完備になることである．このことの証明は読者に委せよう[3]．そこで，Λ から $E\otimes F$ の上への標準的写像の Λ_1 への拡張を J_1 で示そう．J_1 は Λ_1 から $E\widehat{\otimes}_\pi F$ への連続線形写像である．事実，それは Λ_1 から $E\widehat{\otimes}_\pi F$ の上への準同形写像となる．このことを見るには，いつもの図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1 & \xrightarrow{\ J_1\ } & E\widehat{\otimes}_\pi F \\ {\scriptstyle\phi_1}\big\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\widetilde{J}_1} & \\ \Lambda_1/\mathrm{Ker}\,J_1 & & \end{array}$$

を眺めればよい．実際，ϕ_1 による Λ の像は $\Lambda_1/\mathrm{Ker}\,J_1$ の稠密な線形部分空間と

---

1) 命題 43.1 につづく解釈（542 頁）参照．

2) これは，$\mathfrak{p}_n(n\in\mathbf{N})$, $\mathfrak{q}_n(n\in\mathbf{N})$ をそれぞれ E, F 上の連続セミノルムの可算基底とするとき，$\|\ \|_{\mathfrak{p}_n,\mathfrak{q}_n}\ (n\in\mathbf{N})$ が Λ_1 上の連続セミノルムの基底になることを言っている．Λ_1 が距離付け可能になることは，こうするまでもなく自明である．

3) $(x, y)\in T$ とすれば，番号 k が存在して $\mathfrak{p}_k(x)\mathfrak{q}_k(y)\neq 0$．いま $\{f_n\}\ (n=1,2,\ldots)$ を Λ_1 の Cauchy 列とすれば，$\|f_n-f_m\|_{\mathfrak{p}_k\mathfrak{q}_k}\to 0(m,\ n\to\infty)$ より，$\{f_n(x\ \ y)\}$ が $\mathbf{C}$ における Cauchy 列となる．その極限を $f(x, y)$ とすれば，$f\in\Lambda_1$ かつ $\|f_n-f\|_{\mathfrak{p}_k\mathfrak{q}_k}\to 0$ を得る．

なるが，それは $\tilde{J}_1$ によって $E\otimes_\pi F$ に同形である．$E\otimes_\pi F$ で定義されたこの逆写像は，連続性によって，$E\hat{\otimes}_\pi F$ にまで拡張されるが，この拡張は，(Λ_1/Ker J_1 全体で定義された) $\tilde{J}_1$ の逆写像に他ならない．かくして，$\tilde{J}_1$ は上への同形写像である (Λ_1 の完備性を用いたのは，これから Λ_1/Ker J_1 の完備性を出すところだけである)．この準同形写像 J_1 の表現式は，(45.2) によってあたえられる：今の場合で云うならば，各 $f\in\Lambda_1$ は T の可算部分集合の外では 0 になるから，$\sum_{(x,y)\in T} f(x,y)x\otimes y$ は $\hat{E}\otimes_\pi F$ における級数であり，これは明らかに絶対収束する (定義 45.1 参照)．

このようにして，各 $\theta\in E\hat{\otimes}_\pi F$ に対して，(45.2) によく似た，絶対収束級数による表現式が得られた．さて，これから示すべきことは，この級数が，定理 45.2 に述べた性質をすべてもつように，変形できるということである．まず，E および F において，それぞれ連続セミノルムの増大列 $(\mathfrak{p}_m)$, $(\mathfrak{q}_m)$($m=0,1,\ldots$) をえらんで，E(あるいは F) 上の任意のセミノルムは $\leqslant$ 或る $\mathfrak{p}_n$ (あるいは，或る $\mathfrak{q}_n$) となるようにする．さらに，これら二つの列の出発点となる $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$ を

$$U=\{x\in E:\mathfrak{p}_0(x)<1\},\qquad V=\{y\in F\,;\,\mathfrak{q}_0(y)<1\}$$

となるようにえらんでおく．そうすれば [開] 単位球

$$\mathcal{O}=\{f\in\Lambda_1\,;\,\|f\|_{\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0}<1\}$$

は J_1 によって，$U\otimes V$ の $E\hat{\otimes}_\pi F$ における閉凸平衡包の内部の上に写される．この集合を W によって示そう．位相空間に関する次の補題を利用する．

補題 45.1. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ を二つの完備距離空間とし，u を $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ の上への連続開写像とする．$\mathcal{O}$ を $\mathscr{A}$ の開集合とするとき，$u(\mathcal{O})$ の任意のコンパクト集合 K は，$u^{-1}(K)$ の可算部分集合の閉包となるような $\mathcal{O}$ のコンパクト集合 H の像 $u(H)$ になる．

証　明　$\mathcal{O}$ の開部分集合 U であって，その閉包が $\mathcal{O}$ に含まれるもの全体のなす族を考察する．K はコンパクトだから，有限個の $u(U)$ で K を覆うことができるが，これは，$u(U)\supseteq K$ となるような U が存在すると云うのと同じであ

る．さて，$k=1, 2, \ldots$ に関する帰納法によって，U の有限部分集合の増大列，$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots$ を，次の性質をもつように構成しょう．

(i)　A_k はすべて K の逆像に含まれる．

(ii)　A_{k+1} は，A_k からの距離が $< 2^{-k}$ となる U の点全体のなす集合 A_k' に含まれる．

(iii)　$u(A_k') \supseteq K$.

A_1 をえらぶことのできるのは明らかである．そこで，A_k までは決ったとして，A_k からの距離が $< 2^{-k-1}$ となる U の点全体からなる集合を A_k'' と書けば，$u^{-1}(K) \cap A_k'$ の有限部分集合 B_k をえらんで，B_k からの距離が $< 2^{-k-1}$ となる U の点全体の集合が $K-K \cap u(A_k'')$ を含む [$\mathscr{B}$ の] 部分集合の上に写されるようにできる．したがって，$A_{k+1} = A_k \cup B_k$ とすればよい．集合 A_k の合併を A とすれば，A の点はすべて A_k からの距離が $< 2^{-k+1}$ となる．このことは，性質(ii)から直ちに出る．したがって，A はプレコンパクトである(命題6.9参照)．ゆえに，$\mathscr{A}$ における A の閉包を H とすれば，H はコンパクトであり，U に含まれるから，$\mathscr{O}$ に含まれる．ところで，H_k' を $\mathscr{O}$ の点で H からの距離が $\leqslant 2^{-k}$ となるもの全体の集合とすれば，$A_k' \subseteq H_k'$ だから，$K \subseteq u(H_k')$ を得る．これから直ちに，$K \subseteq u(H)$ が導かれる[1]．他方，H は $A \subseteq u^{-1}(K)$ の閉包であり，$u^{-1}(K)$ は閉だから，$u(H) = K$ を得る．(証終)

系　K を完備距離空間 $\mathscr{A}$ のコンパクト集合とすれば，K は稠密な可算部分集合を含む．

証　明　補題45.1を，$\mathscr{A} = \mathscr{B}$，$u$ が恒等写像として適用すればよい．

定理45.2の証明にもどろう．K を W (すなわち $U \otimes V$ の $E \hat{\otimes}_\pi F$ におけ

1)　y を K の任意の点とするとき，$u(H_k') \supseteq K$ より，H_k' の点 z_k が存在して，$y = u(z_k)$ となる．これに対して，H_k' の定義より，H の点 x_k が存在して $d(x_k, z_k) \leqslant 2^{-k}$．ところで，$H$ はコンパクトだから，$\{x_k\}$ は収束する部分列 $\{x_{k'}\}$ を含む．その極限を $x \in H$ とすれば，$d(z_{k'}, x) \leqslant d(z_{k'}, x_{k'}) + d(x_{k'}, x) \leqslant 2^{-k} + d(x_{k'}, x)$ より，$z_{k'}$ も x に収束する．ゆえに，u の連続性から，$y = u(x) \in u(H)$ を得る．

る閉凸平衡包の内部）のコンパクト部分集合とすれば，$\mathcal{O}\subseteq\Lambda_1$ のコンパクト部分集合 H が存在して $J_1(H)=K$ となる．これは，補題45.1による．次に，その系から，$T=(E-\{0\})\times(F-\{0\})$ の可算部分集合 N が存在して，すべての $f\in H$ の台は N に含まれることがわかる．実際，H の可算部分集合 S が存在して，S は H において到るところ稠密となるが，このとき，すべての $f\in S$ の台の合併集合を N とすればよい．任意の $f\in H$ は，列 S の部分列の極限であるから，f は N の外では恒等的に0に等しくなるからである．また，N は可算集合の可算個の合併だから，それは可算集合である．この N の元を勝手な仕方で順序付けて，$N=\{(\xi_n,\ \eta_n)\}_{n=0,1,\ldots}$ とすれば，すべての $\theta\in K$ は或る $f\in H$ に対して

$$\theta=\sum_{n=0}^{\infty}f(\xi_n,\ \eta_n)\xi_n\otimes\eta_n$$

と表わされる．云うまでもなく，この級数は絶対収束する．いま，$a_{mn}=\mathfrak{p}_m(\xi_n)$, $b_{mn}=\mathfrak{q}_m(\eta_m)$, $f_n=f(\xi_n,\ \eta_n)$ とおこう．そうして，数 >0 からなる二つの列 (a_n), (b_n) $(n=0,1,\ldots)$ を，次の性質をもつように構成する．

(45.3)　各 m について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{mn}/a_n+b_{mn}/b_n)=0$

(45.4)　写像 $f\mapsto(f_na_nb_n)_{(n=0,1,\ldots)}$ は，H を l^1 のコンパクト集合 K_1 の中へ写す．

まず注意すべきことは，（Λ_1 の位相の定義によって）各 m について写像 $f\mapsto(f_na_{m,n}b_{m,n})_{(n=0,1,\ldots)}$ は，H を l^1 のコンパクト集合に写すことである．ところで，l^1 のコンパクト集合は無限遠において同等減少だから(定理44.2)，各 m について，整数 $N_m\geqslant 0$ をえらんで

(45.5)　すべての $f\in H$ に対して，$\displaystyle\sum_{n\geqslant N_m}|f_n|a_{m,n}b_{m,n}<8^{-m}$

とすることができる[1]．$H\subseteq\mathcal{O}$ だから，$N_0=0$ としてもよい．そこで，$\varepsilon_n>0$ を，すべての $f\in H$ について

(45.6)　$$\sum_{n\geqslant N_m}|f_n|(2^ma_{m,n}+2^mb_{m,n}+\varepsilon_n)\varepsilon_n<2^{-m}$$

---

1) さらに，後のために，$N\geqslant m$ となるようにしておく．

となるようにえらぶ．このことは可能である．なぜなら，固定した $n \geqslant 0$ に対しては，f が H の中を動くときに得られる集合 $\{f_n\}$ は有界だからである[1]．そこで，$N_m \leqslant n < N_{m+1}$ ならば

$$a_n = \varepsilon_n + 2^m a_{m,n}, \qquad b_n = \varepsilon_n + 2^m b_{m,n}$$

とおく[2]．固定した n に対して，$a_{m,n}, b_{m,n}$ は m について非減少であることを想起すれば，(45.3) が満たされることが容易にわかる．他方，(45.5) と (45.6) を組合せれば

$$\sum_{N_m \leqslant n < N_{m+1}} |f_n| a_n b_n \leqslant 2^{-(m-1)}$$

を得る．したがって

$$\sum_{N_m \leqslant n} |f_n| a_n b_n \leqslant 2^{-(m-2)}$$

が成り立つ．これは．(45.4) の成り立つことを示す．実際，$m=0$ とおけば，$N_m = 0$ だから，f が H の中を動くとき，数列 $(f_n a_n b_n)$ は l^1 において有界にとどまる．それから $m = 1, 2, \ldots$ とすることによって，これらの数列は，l^1 において，無限遠において同等減少な部分集合をなすことがわかる．したがって，定理 44.2 により，l^1 の相対コンパクト部分集合となる．

以上のことを用いれば，定理 45.2 の証明を完成するのは容易である．各 $f \in H$ と各 $n = 0, 1, \ldots$ に対して

$$\tilde{f}_n = f_n a_n b_n, \qquad \tilde{\xi}_n = \xi_n / a_n, \qquad \tilde{\eta}_n = \eta_n / b_n$$

とおく．$a_n, b_n \geqslant \varepsilon_n > 0$ だから，これは可能である．(45.3) から，$\tilde{\xi}_n, \tilde{\eta}_n$ はそれぞれ E, F において 0 に収束することが直ちに導かれる．また，(45.4) から，f が H の中を動くとき，$\{\tilde{f}_n\}$ は l^1 のコンパクト部分集合 $\tilde{H}$ の中にとどまることが導かれる．さらに，数 $\kappa < 1$ が存在して，すべての $f \in H$ について

---

1) n を固定するとき，すべての $f \in H$ について $|f_n| \leqslant C_n$, $(C_n \geqslant 1)$ であるとすれば，$\{a_{m,n}\}$, $\{b_{m,n}\}$ の単調増大性 (m について) を考慮して

$$\varepsilon_n < \mathrm{Min}\,(1,\ 1/C_n(a_{m,n} + b_{m,n} + 1)2^{-3n-1})$$

ととればよい．(ここで $N_m \geqslant m$ を用いた [前頁脚注参照])．

2) n をきめると，m が定まるから，右辺は n のみに依存する．

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{f}_n|\mathfrak{p}_0(\tilde{\xi}_n)\mathfrak{q}_0(\tilde{\eta}_n)=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|\mathfrak{p}_0(\xi_n)\mathfrak{q}_0(\eta_n)<\kappa$$

が成り立つことに注意しょう[1]. [これらのことから] 整数 $N\geqslant 0$ が存在して

$$\mathfrak{p}_0(\tilde{\xi}_n)<1,\quad \mathfrak{q}_0(\tilde{\eta}_n)<1\quad(\text{すべての } n\geqslant N \text{ について})$$

$$\sum_{n\geqslant N}|\tilde{f}_n|<\frac{1-\kappa}{2}\qquad(\text{すべての } f\in H \text{ について})$$

が成り立つ. $n\geqslant N$ に対して, $x_n=\tilde{\xi}_n$, $y_n=\tilde{\eta}_n$, $\lambda_n=\tilde{f}_n$ とおこう. $\varepsilon>0$ を非常に小さい数とする. 各 n について, 二つの数 ρ_n, σ_n を

$$\mathfrak{p}_0(\tilde{\xi}_n)<\rho_n<\mathfrak{p}_0(\tilde{\xi}_n)+\varepsilon,\qquad \mathfrak{q}_0(\tilde{\eta}_n)<\sigma_n<\mathfrak{q}_0(\tilde{\eta}_n)+\varepsilon$$

となるようにえらぶ. $n\leqslant N$ に対しては

$$x_n=\rho_n^{-1}\tilde{\xi}_n,\qquad y_n=\sigma_n^{-1}\tilde{\eta}_n,\qquad \lambda_n=\tilde{f}_n\rho_n\sigma_n$$

とおく. そうすれば, 点列 (x_n), (y_n) は 0 に収束し, また, それぞれ U, V に含まれることは明らかである. さらに, f が H の中を動くとき, (λ_n) は l^1 のコンパクト部分集合の中にとどまる. 最後に,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|&\leqslant\sum_{n<N}|\tilde{f}_n|\rho_n\sigma_n+\frac{1}{2}(1-\kappa)\\&\leqslant\sum_{n<N}|\tilde{f}_n|\mathfrak{p}_0(\tilde{\xi}_n)\mathfrak{q}_0(\tilde{\eta}_n)+\frac{1}{2}(1-\kappa)+C\varepsilon\\&\leqslant\frac{1}{2}(1+\kappa)+C\varepsilon\end{aligned}$$

を得る. ここで C は, $\sup_n\mathfrak{p}_0(\tilde{\xi})$, $\sup_n\mathfrak{q}_0(\tilde{\eta}_n)$, $\tilde{H}$ に依存して定まる正の定数である. したがって, ε を十分小さくとれば, (λ_n) は l^1 の (原点を中心とする) 半径 <1 の球の内部にとどまることがわかる. これで, 定理 45.2 の証明は完成した.

系 1. E, F を二つの Banach 空間とするとき, $E\otimes_\pi F$ の開単位球の各元 θ は, 絶対収束級数

$$\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n x_n\otimes y_n$$

---

1) H は $\mathcal{O}=\{f\in\Lambda_1\,;\,\|f\|_{\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0}<1\}$ に含まれるコンパクト集合, $\|\ \|_{\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0}$ は連続だから $\sup_{f\in H}\|f\|_{\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0}<1$.

に等しい．ここで (x_n), (y_n) は，それぞれ E, F の開単位球に含まれ，0 に収束する列であり，$\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|<1$ である．

系 2. E, F を二つの Eréchet 空間とするとき，$E\widehat{\otimes}_\pi F$ の各コンパクト部分集合は，E のコンパクト部分集合と F のコンパクト部分集合のテンソル積の閉凸平衡包に含まれる．

系 3. E, F を Fréchet 空間，G を完備な局所凸 Hausdorff TVS とする．このとき，$B(E, F; G)$ から $L(E\widehat{\otimes}_\pi F; G)$ の上への標準的(代数的)同形写像は，前者にコンパト集合の積となる各集合上の一様収束の位相を入れ，後者にコンパクト収束位相を入れるとき，同相写像となる．

演 習 問 題

45.1. Fréchet 空間 E のコンパクト集合は，すべて 0 に収束する点列の閉凸平衡包に含まれることを証明せよ．

45.2. E, F を Banach 空間, G を完備な局所凸 Hausdorff 空間とする．$B(E, F; G)$ から $L(E\otimes_\pi F; G)$ の上への標準的代数的同形写像は，前者に有界集合の積集合となるような各集合上の一様収束の位相を入れ，後者に有界収束の位相を入れるとき，同相写像になることを証明せよ．

45.3. E_j, F_j $(j=1,2)$ を四つの Fréchet 空間とし，$u_j: E_j\to F_j$ $(j=1,2)$ を連続線形写像とする．定理 45.1 を用いて u_1, u_2 が共に上への写像ならば，$u_1\widehat{\otimes}_\pi u_2$ もまた上への写像になることを証明せよ．

45.4. H_z を $\mathbf{C}^n$ を動く変数 z に関する整関数の空間，H_ζ' を変数 $\zeta\in\mathbf{C}^n$ の解析的汎関数の空間とし，$H_z(H_\zeta')$ を空間 H_ζ' に値をもつ z の整関数の空間とする (これらの空間は，すべてその自然な位相が入っているものとする)．このとき，次のことを証明せよ．

(i)　$H_z\widehat{\otimes}_\pi H_\zeta'$ から $H_z(H_\zeta')$ の上への標準的な TVS 同形写像が存在する．

(ii)　各元 $\theta(z,\zeta)\in H_z(H_\zeta')\cong H_z\widehat{\otimes}_\pi H_\zeta'$ は，絶対収束級数の和

$$\theta(z,\zeta)=\sum_{p,q\in\mathbf{N}^m}\lambda_{p,q}z^p\otimes\delta_\zeta^{(q)}$$

に等しい．ここで δ_ζ は変数 ζ の点 $\zeta=0$ における Dirac 測度である．

$\theta(z,\zeta)$ による数 $\lambda_{p,q}$ の表現式をあたえよ；各点 $z\in\mathbf{C}^n$ に点 $\zeta=z$ における（変数 ζ に関する）Dirac 測度を対応させる関数 $\delta(z-\zeta)$ は $H_z(H_\zeta')$ に属することを証明し，$\theta(z,\zeta)=\delta(z-\zeta)$ のときの係数 $\lambda_{p,q}$ を計算せよ．

45.5. $\mathcal{E}_x^\infty$ を変数 $x\in\mathbf{R}^n$ の $\mathcal{E}^\infty$ 関数の空間，$\mathcal{E}'_\xi$ を変数 $\xi\in\mathbf{R}^n$ に関する台がコンパクトな超関数の空間とし，$\mathcal{E}_x^\infty(\mathcal{E}'_\xi)$ を $\mathcal{E}'_\xi$ に値をもつ $x\in\mathbf{R}^n$ の $\mathcal{E}^\infty$ 関数の空間とする（これらの空間には，通例の位相が入っているとする）．後に述べることを少々先取りして，標準的に

$$\mathcal{E}_x^\infty(\varepsilon_\xi')\cong\mathcal{E}_x^\infty\,\hat{\otimes}_\pi\mathcal{E}'_\xi$$

となる事実を承認することにする．$\delta(x-y)$ を．各 $x\in\mathbf{R}^n$ に点 $y=x$ における変数 y の Dirac 測度を対応させる関数とする．このとき．$\delta(x-y)$ は $\mathcal{E}_x^\infty(\varepsilon_y')$ に属することを証明せよ．また，$\delta(x-y)$ は $\mathcal{E}_x^\infty(\mathcal{E}'_\xi)$ における絶対収束級数の和として

$$\delta(x-y)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x)\otimes v_j(y)$$

の形には表わせないことを証明せよ；ただし $\{u_j\}\subseteq\mathcal{E}^\infty$, $\{v_j\}\subseteq\mathcal{E}'$ は有界集合とする（もしこのように表わせたとすれば，各関数 $u\in\mathcal{E}^\infty$ は $u=\sum_{j=1}^\infty\lambda_j u_j$ の形に書ける［これは不可能］ことを示せ）．

45.6. E を Banach 空間，E' をその強双対とし，j を $E\otimes_\pi E'$ から $L(E,E)$ への自然な単射とする．連続線形写像 j の $E\hat{\otimes}_\pi E'$ への拡張を $\hat{j}$ で示す．このとき，（定理 45.1 を用いて）次の二つの事実の同値なことを証明せよ．

(a) 恒等写像 $E\to E$ は $\hat{j}(E\hat{\otimes}_\pi E')$ に属する．

(b) $\dim E<+\infty$．

46.

位相テンソル積の完備化の例
空間 L^1 との完備 π-積

44 章では，空間E (局所凸 Hausdorff で，なるべくならば完備な空間) と絶対可総和複素数列の空間 l^1 との完備 ε-積を考察した．そうして，E が完備ならば，$l^1 \hat{\otimes}_\varepsilon E$ は E における可総和列の空間と標準的に同形であることを示した．l^1 が，非負整数の集合 $\mathbf{N}$ 上の，各点 n に質量 $+1$ をおく測度 dn に関する可積分関数であることは，言うまでもない．この章では，一つの集合 X 上の任意の測度 μ に関する空間 L^1 と空間 E との π-積を考察する．そうして，とくに E が Banach 空間のときには，$L^1 \hat{\otimes}_\pi E$ は E に値をもつ可積分関数の空間 $L^1(E)$ にちょうど'等しい'ことを示す．$L^1 = l^1$ の場合には，これは $l^1 \hat{\otimes}_\pi E$ が E における絶対可総和列の空間と同一視できることを意味しており，かくして，ε-積と π-積の完備化の相異を明瞭にする．実際，E が無限次元 Banach 空間ならば，$l^1 \hat{\otimes}_\pi E$ から $l^1 \hat{\otimes}_\varepsilon E$ への標準写像は，決して上への写像にならないことが証明できる．このことから直ちに，Dvoretzky-Rogers の定理：《無限次元 Banach 空間においては，絶対可総和でない可総和列が少くとも一つ存在する．》が出る．この事実は，E が**核型**空間の場合と対照をなしている．核型空間の理論は次章から始まるが，その場合には，任意の局所凸 Hausdorff 空間 F に対して $E \hat{\otimes}_\pi F = E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ が成り立つ．明らかに，そのような空間では，可総和列は絶対可総和となる．言うまでもないが，無限次元 Banach 空間は核型になり得ない．

46.1. 空間 $L^\alpha(E)$

X を集合，dx をその上の正測度，E を局所凸 Hausdorff 空間，α を $1 \leqslant \alpha < +\infty$ となる数とする．

$\mathscr{F}^\alpha(E)$ によって，関数 $\mathbf{f}: X \to E$ のうちで，E 上の任意の連続セミノルム p に対して

$$\|\mathbf{f}\|_{L^\alpha,p} = \left(\int^* p(\mathbf{f}(x))^\alpha dx\right)^{1/\alpha} < +\infty \tag{46.1}$$

となるもの全体のなすベクトル空間を表わす．ここで $\int^*$ は上積分を表わすとする．$\mathscr{F}^\alpha(E)$ には，(46.1) の形のセミノルム全体で定義される位相を入れる．$\sum \otimes E$ によって，**可積分階段関数** (integrable step-function) $\mathbf{s}: X \to E$ からなる $\mathscr{F}^\alpha(E)$ の線形部分空間を表わす．可積分階段関数とは，$\sum_j \sigma_j \mathbf{e}_j$ の形の有限一次結合である．ここで，σ_j は可積分な複素数値関数であり，$\mathbf{e}_j$ は E に属するベクトルである（もちろん，σ_j は可積分集合の特性関数としてもよい）．$\sum \otimes E$ の $\mathscr{F}^\alpha(E)$ における閉包を $\mathscr{L}^\alpha(E)$ によって表わす．$\mathscr{L}^\alpha(\mathbf{C})$ は通例 $\mathscr{L}^\alpha$ によって示す．定義から明らかなように，$\mathscr{L}^\alpha \otimes E$ は $\mathscr{L}^\alpha(E)$ において稠密である．$\mathscr{L}^\alpha(E)$ は一般には Hausdorff でない．これに付随する Hausdorff 空間を $L^\alpha(E)$ によって表わす．$L^\alpha = L^\alpha(\mathbf{C})$ とおく．これらの記号は，扱っている測度 dx が一つだけのときはよい．多くの測度を取り扱うときには，混乱が起らないように，記号を工夫せねばならない．

空間 $\mathscr{F}^\infty(E)$ は，関数 $\mathbf{f}: X \to E$ であって，E 上の任意の連続セミノルム p に対して数 $M_p \geqslant 0$ と測度 0 の集合 $N_p \subseteq X$ が存在して，

$$\text{すべての } x \notin N_p \text{ について，} p(\mathbf{f}(x)) \leqslant M_p \tag{46.2}$$

となるもの全体のなす空間とする．このとき，(46.2) が測度 0 の或る集合 N_p について成りたつような数 M_p の下限として，$\|\mathbf{f}\|_{L^\infty,p}$ を定義する．$\mathscr{F}^\infty(E)$ の位相は，セミノルム $\mathbf{f} \mapsto \|\mathbf{f}\|_{L^\infty,p}$ の族によって定義する．可測な関数 $\mathbf{f}$ から成

る $\mathscr{F}^\infty(E)$ の部分空間を $\mathscr{L}^\infty(E)$ によって表わす．これに付随する Hausdorff 空間を $L^\infty(E)$ によって示す．

Fisher-Riesz の定理の単純な拡張を用いて，E が Fréchet 空間ならば，空間 $L^\alpha(E)$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant +\infty)$ は完備になることが証明できる．しかし，このことは，E が距離付け可能でなければ，一般には正しくない．

$\mathscr{L}^\alpha \otimes E$ の $L(E)$ における標準的像を，$L^\alpha \otimes E$ で示す．これが L^α と E のテンソル積になることは，直ちにわかる．$\alpha \geqslant 1$ が有限ならば，$\mathscr{L}^\alpha \otimes E$ は $\mathscr{L}^\alpha(E)$ において稠密である．このとき，稠密な集合の標準的像だから，$L^\alpha \otimes E$ も $L^\alpha(E)$ において稠密となる．

さて，E が Banach 空間の場合に考察をしぼろう．ノルムは $\| \;\|$ とする．この場合，$\mathscr{L}^\alpha(E)$ の位相は唯一つのセミノルムによって定義され，$L^\alpha(E)$ はノルム空間となる．さらに $L^\alpha(E)$ は完備であり，したがって Banach 空間となる (Fisher-Riesz の定理)．その元は，($\mathscr{L}^\alpha(E)$ に属する) ほとんど到るところ等しい関数の同値類として解釈できる．直ちにわかるように，双線形形式

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x) \rangle \, dx$$

は，$L^\alpha(E) \times L^{\alpha'}(E')$ 上で連続である．ここで，E' は E に双対な Banach 空間であり，$\alpha' = \alpha/(\alpha-1)$ とする．これによって，$L^{\alpha'}(E')$ から $(L^\alpha(E))'$ への標準写像が定義される．この写像は等距離写像になることがわかるが，一般には上への写像にならない．

$f \in L^\alpha$, $\mathbf{e} \in E$ とすれば

$$\left(\int \| f \mathbf{e}^\alpha \| dx \right)^{1/\alpha} = \left(\int |f|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \|\mathbf{e}\|$$

を得る．これは，$L^\alpha \times E$ から $L^\alpha(E)$ への双線形写像 $(f, \mathbf{e}) \mapsto f\mathbf{e}$ のノルムが 1 であることを示している．ところで (命題 43.12)，$L^\alpha \otimes E$ 上の π-ノルムは，$L^\alpha \times E$ から $L^\alpha \otimes E$ への標準写像のノルムが 1 になるような $L^\alpha \otimes E$ 上の最大のノルムである．したがって，π-ノルムは $L^\alpha(E)$からの誘導ノルムよりも大きいことがわかる．$\alpha > 1$ ならば，(少なくとも一般には) π-ノルムは $L^\alpha(E)$ の

ノルムよりも真に大きい．もしこれらのノルムが等しいならば，それは（α が有限のときには）$L^\alpha(E) = L^\alpha \hat{\otimes}_\pi E$ となることを意味する．たとえば，これを $E =$ '集合 Y 上の正測度 dy に関する空間 L^α' に適用して見る．この場合，$L^\alpha(E) = L^\alpha_{dx}(L^\alpha_{dy})$ は集合 $X \times Y$ 上の積測度 $dx\,dy$ に関する空間 $L^\alpha_{dx\,dy}$ と標準的に同一視できる（同一視はノルムもこめて!）．したがって $L^\alpha_{dx\,dy} \cong L^\alpha_{dx} \hat{\otimes}_\pi L^\alpha_{dy}$（$\cong$：標準的同形）を得ることになるが，これは後に $\alpha = 2$ の場合に見るように（49 章），一般には正しくない．

しかしながら，$L^1 \hat{\otimes}_\pi E = L^1(E)$ は正しい．これが，この章の主結果である．

46.2. Dunford–Pettis の定理

前と同様に，一つの集合 X とその上の正測度 dx を考える．$\mathcal{B}^\infty$ によって，X 全体の上で有界な複素数値関数全体のなす空間を表わす．これには，その自然なノルム $f \mapsto \sup_{x \in X}|f(x)|$ を入れる．$\mathcal{B}^\infty$ は明らかに Banach 空間となる．$\mathcal{B}^\infty$ は 585 頁に導入された空間 $\mathcal{F}^\infty$ とは全く異なる．$\mathcal{F}^\infty$ の元は有界な関数であるとは限らない．$\mathcal{N}$ によって，測度 0 の集合の外では 0 となる関数からなる $\mathcal{B}^\infty$ の線形部分空間を表わそう．$\mathcal{N}$ は閉である．実際，$\mathcal{N}$ に属する元の列 $\{f_k\}$ が $\mathcal{B}^\infty$ の元 f に収束するとすれば，各 f_k は測度 0 の集合 N_k の外で 0 となるから，合併集合 $\bigcup_k N_k$ の外では $f = 0$ となるが，この合併集合も測度 0 である．商空間 $\mathcal{B}^\infty/\mathcal{N}$ を B^∞ で表わし，それに自然な Banach 空間構造を入れる．$\mathcal{L}^\infty$ は $\mathcal{B}^\infty$ に含まれていないにもかかわらず，L^∞ から B^∞ への自然な等距離写像が存在する．なぜなら，任意の $f \in \mathcal{F}^\infty$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g \in \mathcal{B}^\infty$ が存在して，ほとんど到るところ $f = g$ となり，かつ

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant \sup_{x \in X}|g(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} + \varepsilon$$

を得るからである．もちろん，f が可測ならば g もそうなる．

ここで，二つの新しい用語を導入することは便利であり，陳述を簡単にするのに役立つ．始めのものは，広く用いられているものである．

定義46. 1. 位相空間の部分集合 A が**可分** (separable) であるとは，A において稠密な可算部分集合 B を A が含むときに言う．

次のものもよく使われている．f を集合 E から集合 F の上への写像とするとき，F の部分集合 V の**持ち上げ写像** (lift)[1] とは，V から E への写像 g で，$f\circ g$ が V の恒等写像になるものを言う (V 上での f の**右逆写像** (right inverse) と言ってもよい)．

さて，次に補題を述べて証明しよう．これは，Dunford-Pettis の定理の証明に利用される．

補題 46.1. B^∞ の任意の可分な線形部分空間は，$\mathcal{B}^\infty$ への線形等距離写像となるような持ち上げ写像をもつ．

この補題で考えている $\mathcal{B}^\infty$ から B^∞ の上への写像は，もちろん標準的準同形写像のことである．

証 明. A を (V において) 稠密な V の可算部分集合とし，W を有理数体 $\mathbf{Q}$ に係数をもつ A の元の有限一次結合全体のなす集合とする．W から $\mathcal{B}^\infty$ への任意の $\mathbf{Q}$-線形な持ち上げ写像を τ とする．このような τ を得るには，W の [$\mathbf{Q}$-線形空間としての] 代数的基底を任意の仕方で持ち上げておいて，これを $\mathbf{Q}$-線形性によって拡張すればよい．w を W の元とするとき，w の $\mathcal{B}^\infty$ における任意の二つの代表元は，測度 0 の集合の上でしか違わない．したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して測度 0 の集合 N_ε が存在して

$$|\tau(w)(x)|\leqslant\|w\|_{B^\infty}+\varepsilon\qquad(x\notin N_\varepsilon \text{ のとき})$$

が成り立つ．そこで，N_w によって，$n\to\infty$ のときの $N_{1/n}$ の合併集合を表わすならば，

---

1) V 上の**横断面** (cross section) とも言う．

$$|\tau(w)(x)| \leqslant \|w\|_{\mathcal{B}^\infty} \qquad (x \notin N_w \text{ のとき})$$

が成り立つ．w が W の中を動くときの N_w の合併集合を N とすれば，W は可算集合だから，N の測度も 0 に等しい．そこで，持ち上げ写像 $\sigma: W \to \mathcal{B}^\infty$ を

$$\sigma(w)(x) = 0 \qquad (x \in N \text{ のとき})$$

$$\sigma(w)(x) = \tau(w)(x) \qquad (x \notin N \text{ のとき})$$

によって定義する．これは持ち上げ写像だから，$\|w\|_{B^\infty} \leqslant \sup_{x\in X}|\sigma(w)(x)|$ が成り立つ．ところで，$|\sigma(w)(x)| \leqslant \|w\|_{B^\infty}$ がすべての $x \in X$ について成りたつから，σ は等距離写像である．また，σ は明らかに線形である（τ が線形だから）[1]．連続性によって，σ を B^∞ における W の閉包（それは V を含む）にまで拡張できる（ここで $\mathcal{B}^\infty$ が完備であることを利用した!），線形等距離写像の拡張は線形等距離写像であるし，σ が $\mathcal{B}^\infty$ から B への標準写像の W 上での右逆写像ならば，そのことはその拡張についても正しい．ところで，それは $\overline{W} \supseteq V$ 上での右逆写像である．（証終）．

E を Banach 空間とし，E' をその双対にその Banach 空間構造を入れたものとする．E, E' のノルムは，共に $\| \ \|$ で示す．

定義 46.2. 関数 $\mathbf{f}: X \to E'$ が**スカラー的に可測** (scalarly measurable) であるとは，任意の $\mathbf{e} \in E$ に対して，複素数値関数

$$x \mapsto \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{e} \rangle$$

が可測になることを言う．

ここで，可測とは，X において dx-可測であることを意味している．X から E' への可測関数は，すべてスカラー的に可測である．しかし，逆は一般には正しくない．

ここで，しばらくの間，$\mathcal{L}^\infty$ から L^∞ の上への標準的射影を π で表わすことにする．前と同様，E は Banach 空間とする．

---

1) まず $\mathbf{Q}$-線形であり，連続性から $\mathbf{R}$-線形．上の議論を w の実部と虚部について別々に行ったとするならば，$\mathbf{C}$-線形性が得られる．

命題 46.1． $\mathbf{g}: X \to E'$ をスカラー的に可測な有界関数とすれば，

$$\mathbf{e} \mapsto \pi(x \mapsto (\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e} \rangle)) \tag{46.3}$$

は，E から L^∞ への連続線形写像であり，そのノルムは $\leqslant \sup_{x \in X}\|\mathbf{g}(x)\|$ となる．

Dunford–Pettis の述べるところは，E が可分であるという仮定のもとで，E から L^∞ への連続線形写像はすべて (46.3) の形になること，さらに関数 $\mathbf{g}$ は，写像 (46.3) のノルムが X 上の $\|\mathbf{g}\|$ の最大値にちょうど一致するように，えらぶことができるということである．

定理 46.1． E を可分な Banach 空間とする．このとき，E から L^∞ への任意の連続線形写像 u に対して，スカラー的に可測な有界関数 $\mathbf{g}: X \to E'$ が存在して，u は (46.3) に等しく，u のノルムは $\sup_{x \in X}\|\mathbf{g}(x)\|$ に等しい．

証　明． E は可分だから，$u(E)$ は L^∞ の可分線形部分空間となる．したがって，補題 46.1 により，$u(E)$ から $\mathscr{B}^\infty$ への持ち上げ写像 σ が存在して，σ は線形等距離写像となる．各 $\mathbf{e} \in E$ と各 $x \in X$ に対して，$g_{\mathbf{e}}(x) = \sigma[u(\mathbf{e})](x)$ とおく．$\mathbf{e}$ を固定すれば，関数 $g_{\mathbf{e}}$ は $\mathscr{L}^\infty$ に属することに注意しよう (実際，それは，$u(\mathbf{e}) \in L^\infty$ の他の代表元とは測度 0 の集合の上でしか異なることはない)．さらに

$$|g_{\mathbf{e}}(x)| \leqslant \sup_{x \in X}|\sigma[u(\mathbf{e})](x)| \leqslant \|u(\mathbf{e})\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|\|\mathbf{e}\|$$

が成り立つ．これは，x を固定したとき，$\mathbf{e} \mapsto g_{\mathbf{e}}(x)$ が E 上の連続線形形式になることを意味している．この線形形式を $\mathbf{g}(x) \in E'$ で表わす．もちろん，すべての $\mathbf{e} \in E$ に対して $g_{\mathbf{e}} \in \mathscr{L}^\infty$ だから，$x \mapsto \mathbf{g}(x)$ はスカラー的に可測かつ有界な関数 $X \to E'$ となる．さらに，

$$\begin{aligned}\sup_{x \in X}\|\mathbf{g}(x)\| &= \sup_{x \in X}\Big(\sup_{\mathbf{e} \in E, \|\mathbf{e}\|=1}|g_{\mathbf{e}}(x)|\Big) \\ &= \sup_{\|\mathbf{e}\|=1}\Big(\sup_{x \in X}|\sigma[u(\mathbf{e})](x)|\Big) = \sup_{\|\mathbf{e}\|=1}\|u(\mathbf{e})\|_{L^\infty} = \|u\|\end{aligned}$$

を得る．最後に，写像 u は (46.3) に等しい．なぜなら，すべての $\mathbf{e} \in E$ と $x \in X$ について

$$\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e}\rangle = g_{\mathbf{e}}(x) = \sigma[u(\mathbf{e})](x)$$

となるからである．(証終)．

さて，Dunford-Pettis の定理に同値な二つの命題を，系として述べておこう．しかし，そのためには，準備的な注意を述べておく必要がある．いま，$\mathbf{g}: X \to E'$ をスカラー的に可測かつ有界と仮定すれば，任意の $\mathbf{e} \in E$ に対して，関数 $x \mapsto \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e}\rangle$ は $\mathscr{L}^\infty$ に属する．したがって，関数 $f \in \mathscr{L}^1$ との積の積分を計算することができるが，

$$\left|\int \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e}\rangle f(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in X}|\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e}\rangle| \int |f(x)|dx$$

$$\leqslant (\sup_{x\in X}\|g(x)\|)\|\mathbf{e}\|\int |f(x)|dx$$

となるから．

$$\mathbf{e} \mapsto \int \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e}\rangle f(x)\,dx$$

は E 上の連続線形形式となることがわかる．それを

$$\int \mathbf{g}(x) f(x)\,dx \tag{46.4}$$

で表わすのは，自然であろう．(46.4) の (E' における) ノルムは $\leqslant (\sup_{x\in X}\|\mathbf{g}(x)\|)\|f\|_{L^1}$ となる．また，(46.4) の値は，f と殆どいたるところ等しい関数で f をおきかえても変らないことも明らかである．したがって，

$$f \mapsto \int \mathbf{g}(x) f(x)\,dx \tag{46.5}$$

は L^1 から E' への線形写像と見ることができる．この写像のノルムは $\leqslant \sup_{x\in X}\|\mathbf{g}(x)\|$ である．

さて，Durford-Pettis の定理に同値な，二つの変形をを述べよう．それらの同値性の証明は (やさしい) 演習問題として，読者にまかせる．

系 1. E を可分な Banach 空間とすれば，任意の連続線形写像 $v: L^1 \to E'$ に対して，スカラー的に可測な有界関数 $\mathbf{g}: X \to E'$ が存在して，v は (46.5)

であたえられ，v のノルムは $\sup_{x\in X}\|\mathbf{g}(x)\|$ に等しい．

系 2. E を可分な Banach 空間とすれば，$L^1\times E$ 上の任意の連続双線形形式 Φ に対して，スカラー的に可測な有界関数 $\mathbf{g}: X\to E'$ が存在して，すべての $f\in L^1$, $\mathbf{e}\in E$ について

$$\Phi(f, \mathbf{e}) = \int \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e}\rangle f(x)\, dx$$

が成り立ち，Φ のノルムは $\sup_{x\in X}\|\mathbf{g}(x)\|$ に等しい．

46.3. $L^1 \hat{\otimes}_\pi E$ への応用

λ を $L^1(E)$ (46.1 を見よ) 上の連続線形汎関数とする．λ の $L^1\otimes E$ への制限は，このベクトル空間上の線形形式をあたえ，したがって，$L^1\times E$ の双線形形式 B_λ を定義するが (定理 39.1 (*b*))，それが連続であることは直ちにわかる．さらに，$\|B_\lambda\|\leqslant\|\lambda\|$ である．実際，すべての $f\in L^1$ とすべての $\mathbf{e}\in E$ について

$$B_\lambda(f, \mathbf{e}) = \lambda(f\mathbf{e}) \tag{46.6}$$

だからである．B_λ によって λ が決まることに注意しよう．なぜなら，(46.6) によって λ の $L^1\otimes E$ 上の値が定まるが，$L^1\otimes E$ は $L^1(E)$ において稠密だからである (586 頁)．

定理 46.2. E を Banach 空間とするとき，$L^1\otimes E$ から $L^1(E)$ への標準的単射は，$L^1 \hat{\otimes}_\pi E$ から $L^1(E)$ の上への線形等距離写像に拡張できる．

証 明. 1. E が可分の場合．定理 46.2 の前に考察した写像

$$\lambda \mapsto B_\lambda \quad (B_\lambda : (f, \mathbf{e}) \mapsto \lambda(f\mathbf{e}))$$

が，$L^1(E)$ の双対から $L^1\times E$ 上の連続双線形形式のなす Banach 空間 $B(L^1, E)$ の上への等距離写像になることを示めそう．それができれば，$L^1(E)$ の稠密

な線形部分空間 $L^1 \otimes E$ に $L^1(E)$ から誘導したノルムを入れたものの双対が，$B(L^1, E)$ に等しいことがわかる．命題 43.12 の (c) を用いれば，$L^1(E)$ から $L^1 \otimes E$ に誘導したノルムが π-ノルムに等しいことがわかる．このことから，E が可分な場合に，定理が直ちに導かれる．

さて，$B \in B(L^1, E)$ とすれば，定理 46.1 の系 2 によって，スカラー的に可測な有界関数 $\mathbf{g}: X \to E'$ が存在して，すべての $\mathbf{e} \in E$ と $f \in L^1$ について

$$B(f, \mathbf{e}) = \int \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{e} \rangle f(x)\, dx$$

となり，また

$$\|B\| = \sup \|\mathbf{g}(x)\|$$

が成り立つ．

いま $\mathbf{f} \in \mathscr{L}^1(E)$ とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，E に値をとる可積分階段関数 $\mathbf{f}_\varepsilon$ が存在して

$$\int \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_\varepsilon(x)\|\, dx < \varepsilon \tag{46.7}$$

となる．ここで，$\mathbf{f}_\varepsilon$ は次の形をもつ

$$\mathbf{f}_\varepsilon = \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \mathbf{f}_{\varepsilon,j} \chi_{\varepsilon,j} \qquad J_\varepsilon < +\infty$$

ただし，$\mathbf{f}_{\varepsilon,j}$ は E の元であり，$\chi_{\varepsilon,j}$ は X の可積分集合の特性関数である．このとき

$$\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}_\varepsilon(x) \rangle = \sum_j \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}_{\varepsilon,j} \rangle \chi_{\varepsilon,j}(x)$$

は，x の関数として $\mathscr{L}^1$ に属することに注意しよう．なぜなら，すべての j について，関数 $\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}_{\varepsilon,j} \rangle$ は有界可測だからである．(46.7) から

$$\int |\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}(x) \rangle - \langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}_\varepsilon(x) \rangle|\, dx \leqslant \varepsilon \sup_{x \in X} \|\mathbf{g}(x)\| \tag{46.8}$$

となる．ここで，積分記号は上積分の意味にとってもよいが，本当の積分と考えることもできる．それは，$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$ は可測関数列 $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_\varepsilon \rangle$ ($\varepsilon = 1/n$; $n = 1, 2, \ldots$) の殆どいたるところの極限として可測であり，$|\langle \mathbf{g}(x), \mathbf{f}(x) \rangle| \leqslant (\sup_{x \in X}$

$\|\mathbf{g}(x)\|\|\mathbf{f}(x)\|$ だからである．この最後の式または (46.8) から，$\langle\mathbf{g}, \mathbf{f}\rangle \in \mathscr{L}^1$ となることがわかる．そこで

$$\lambda(\mathbf{f}) = \int \langle\mathbf{g}(x), \mathbf{f}(x)\rangle\, dx$$

とおけば，

$$|\lambda(\mathbf{f})| \leqslant \|B\| \int \|\mathbf{f}(x)\| dx$$

を得る．とくに，$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$ a.e.[1] ならば $\lambda(\mathbf{f}) = \lambda(\mathbf{f}_1)$ となる．結局，λ は $L^1(E)$ 上の連続線形形式と見なすことができて，そのノルムは $\leqslant \|B\|$ である．ところで，$f \in L^1$, $\mathbf{e} \in E$ とすれば，$\lambda(f\mathbf{e}) = \int \langle\mathbf{g}(x), \mathbf{e}\rangle f(x)\, dx = B(f, \mathbf{e})$ となるから，$B = B_\lambda$ である．すでに見たように (592 頁)，$\|B_\lambda\| \leqslant \|\lambda\|$ であったから，$\|\lambda\| = \|B\|$ が証明されたことになり，したがって，われわれの主張：《E が可分ならば，$\lambda \mapsto B_\lambda$ は $(L^1(E))'$ から $B(L^1, E)$ の上への等距離写像となる》も証明できたことになる．

証　明. 2. E が一般の場合．$\theta \in L^1 \otimes E$ とすれば，E の有限次元部分空間 M が存在して，$\theta \in E \otimes M$ となる．そこで，$L^1 \otimes_\pi E$ および $L^1 \otimes_\pi M$ におけるノルムを，それぞれ $\| \ \|_{\pi_E}$, $\| \ \|_{\pi_M}$ で表わすことにしよう．$L^1 \times M$ から $L^1 \otimes M$ への標準写像は，後者にノルム $\| \ \|_{\pi_E}$ を入れたときに連続で，そのノルムは $\leqslant 1$ だから，命題 43.12 (a) によって，$L^1 \otimes M$ 上のノルム $\| \ \|_{\pi_E}$ は $\leqslant \| \ \|_{\pi_M}$ となる．ところで，M は可分だから，(1) の場合によって

$$\|\theta\|_{\pi_M} = \int \|\theta(x)\| dx = \|\theta\|_{L^1(E)}$$

を得る．なぜなら，M には，いうまでもなく，E から誘導されたノルムが入っているとしているからである．$L^1 \times E$ から $L^1(E)$ への標準写像のノルムは $\leqslant 1$ だから，再び命題 43.12 (a) によって

$$\|\theta\|_{L^1(E)} \leqslant \|\theta\|_{\pi_E}$$

を得る．これらの不等式をすべて組合せれば，θ に対して導入されたノルムは

1) almost everywhere 殆どいたるところ．

すべて等しいことがわかる．とくに

$$\|\theta\|_{L^1(E)} = \|\theta\|_{\pi_E}$$

である．(証終)．

系． E を Banach 空間とするとき，写像

$$\lambda \mapsto ((f, \mathbf{e}) \mapsto \lambda(f\mathbf{e}))$$

は，$L^1(E)$ の強双対から $B(L^1, E)$ の上への等距離写像である．

実際，$B(L^1, E)$ は（ノルム空間として）$L^1 \otimes_\pi E \cong L^1(E)$ の双対と標準的に同形である[1]．これよって，$L^1(E)$ の双対から $B(L^1, E)$ の上への等距離写像が定義されるが，それが系に述べた写像であることは直ちにわかる．この系は，定理 46.2 の証明 1 で述べて証明したことの，非可分 Banach 空間の場合への拡張になっていることを注意しておこう．

演 習 問 題

46.1. E を Banach 空間とし，F を E の線形部分空間（ノルムは E からの誘導ノルム）とする．このとき，次のことを証明せよ：(i) $L^1 \otimes F$ に $L^1 \otimes_\pi E$ から誘導したノルムは，$L^1 \otimes F$ の π-ノルムに等しい；(ii) $L^1 \times F$ 上の連続双線形形式は，ノルムを保存しながら，$L^1 \times E$ 上の連続双線形形式に拡張できる．

46.2. E, F は演習問題 46.1 と同様とする．このとき，F から L^∞ への連続線形写像は，ノルムを保存しながら，E から L^∞ への連続線形写像に拡張できることを証明せよ．

46.3. X, Y を二つの集合とし，dx と dy をそれぞれ X, Y 上の正測度とする．u を L^1_{dx} から L^1_{dy} への連続線形写像とし，E を Banach 空間とする．このとき，一意的に定まる連続線形写像 $\tilde{u} : L^1_{dx}(E) \to L^1_{dy}(E)$ が存在して，すべての $f \in L^1_{dx}$ と $\mathbf{e} \in E$ について $\tilde{u}(f\mathbf{e}) = u(f)\mathbf{e}$ となることを証明せよ．また $\|\tilde{u}\| = \|u\|$ となることを証明せよ．

46.4. E を局所凸 Hausdorff 空間とする．このとき，$L^1 \otimes E$ から $L^1(E)$ への標準単射は，$L^1 \hat{\otimes}_\pi E$ から $L^1(E)$ の上への（TVS 構造に関する）同形写像に拡張できることを証明せよ．

---

1) 命題 43.12 参照．これと上の定理を結びつければよい．

46.5. X, Y, dx, dy は演習問題 46.3 の通りとする．有限なすべての $\alpha \geqslant 1$ に対して

$$L^{\alpha}_{dx\,dy} = L^{\alpha}_{dx}(L^{\alpha}_{dy})$$

となることを証明せよ．$L^1_{dx\,dy} \cong L^1_{dx} \widehat{\otimes}_{\pi} L^1_{dy}$ となることを証明せよ．

46.6. $X = Y = \mathbf{R}^n$, $dx = dy =$ Lebesgue 測度とする．このとき

$$(f, g) \mapsto \int \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) f(x) g(y)\, dx\, dy$$

は $L^2_{dx} \times L^2_{dy}$ 上の連続双線形形式となることを証明せよ．また $L^2_{dx\,dy} \not\cong L^2_{dx} \widehat{\otimes}_{\pi} L^2_{dy}$ を証明せよ（ただし，$\not\cong$ は標準的同形の否定である）．

46.7. dx を $X = \mathbf{R}^n$ 上の Lebesgue 測度とする．Eを Hilbert ノルムの入った有限次元空間とする．このとき，$L^2_{dx} \otimes E = L^2_{dx}(E)$ 上の π-ノルムは，$L^2(E)$ のノルムに同値であるが，それよりも真に大きいことを証明せよ．

47.

核 型 写 像

36 章で導入した E_B 空間の概念を組織的に利用する. E を局所凸 Hausdorff 空間, B を E の凸平衡的有界集合とするとき, B によって張られる E の線形部分空間を E_B と書く. E_B には, ノルム $x \mapsto p_B(x) = \inf_{\rho>0, x\in\rho B} \rho$ (460 頁参照) を入れて考える. 次の定義を用いる.

定義 47.1. E の凸平衡的有界集合 B が**劣完備** (infracomplete) であるとは, ノルム空間 E_B が Banach 空間になるときに云う.

既に見たように (補題 36.1 と系), B 自身が完備ならば (特別の場合として, B がコンパクトならば), B は劣完備である. しかし, 逆を必ずしも成り立たない (演習問題 47.1 参照) [1].

重要な特別な場合としては, 空間 $E'_{H'}$ がある. ここで, E' は局所凸 Hausdorff 空間 E の双対であり, H' は E' の弱閉凸平衡的同等連続集合である (したがって, H' は弱コンパクト) [2]. $E'_{H'}$ は自然な解釈ができるが, これは憶えておかねばならない. H'^0 を H' の E における極とすれば, H'^0 は E における 0 の (E の始位相に関する) 凸平衡的閉近傍である. 簡単のために, これを U と書こう. このとき, 空間 E に 0 の近傍基底として U のスカラー倍 ρU, $\rho > 0$ を

1) 定義から明らかなように, 《B が劣完備であるための必要十分条件は, E_B の線形構造に整合する E_B 上の局所凸 Hausdorff 位相のうちで, それに関して B が完備有界集合となるようなものが存在することである》. とくに, 《E の線形構造に整合する E 上の局所凸 Hausdorff 位相が存在して, その位相に関して B が完備有界集合となるならば, B は劣完備である》.

2) E' 上で $\sigma(E', E)$ を考えれば, 前脚注により, H' は劣完備.

採用することによって得られる位相を入れたものを E_U と書く. 直ちにわかるように, $E'_{H'}$ は, E 上の線形形式であって, E_U 上で連続なもの全体のなす空間に他ならない. 一般に, E_U は Hausdorff ではない. これに付随する Hausdorff 空間は明らかにノルム空間である. その完備化は Banach 空間となるが, それを $\widehat{E}_U$ で表わす. E における 0 の任意の凸平衡的閉近傍は, (その極である) E' の弱閉凸平衡的同等連続集合の極になっていることに注意しよう. U に対応する E 上のセミノルムを $\mathfrak{p}$ とすれば,

$$\mathfrak{p}(x) = \inf_{x \in \rho U,\, \rho>0} \rho$$

である. E_U に付随する Hausdorff 空間は $E_U/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ にその商位相を入れたものに他ならない. $x' \in E'_{U^0}$ (前の記号を用いれば $U^0 = H'$) は, すべて $\mathfrak{p}$ によって定義される位相に関して連続な E 上の線形形式である. したがって, $E_U/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ 上の連続線形形式を定義し, 連続性による拡張によって, $\widehat{E}_U$ 上の連続線形形式を定義する. このようにして, E'_{U^0} は Banach 空間として (すなわちノルムも込めて) 明らかに, $\widehat{E}_U$ の双対と同一視することができる. 写像の列

$$E \xrightarrow{h_U} E_U/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p} \xrightarrow{j_U} \widehat{E}_U$$

の合成として, E から $\widehat{E}_U$ への標準的写像を得る. ここで h_U は [商空間への] 標準的写像であり, j_U は完備化への自然な単射である. 注意すべきことは, 一般には, h_U は開写像でないことである. なぜなら, $E_U/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ の位相は, E の $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ を法とする商位相ではなくて, E_U の商位相だからである.

E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間として, E の双対と F のテンソル積 $E' \otimes F$ を連続線形写像 $E \to F$ の空間 $L(E, F)$ の線形部分空間, すなわちその像が有限次元になるような写像のなす部分空間と考える. $E' \otimes F$ の元 $\sum_j x_j' \otimes y_j$ (有限和) は, 写像

$$x \mapsto \sum_j \langle x_j', x \rangle y_j$$

を定義するからである.

しばらくの間, E と F が共に Banach 空間の場合を考えよう. いつものように, $L_b(E, F)$ によって, 空間 $L(E, F)$ に有界収束の位相, すなわち作用

素ノルム

$$\|u\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|u(x)\|$$

によって定義される位相を入れたものを表わす．$E'\times F$ から $L_b(E, F)$ への標準的双線形写像

$$(x', y) \mapsto (x \mapsto \langle x', x\rangle y)$$

は，明らかに連続であり，そのノルムは $\leqq 1$ である．したがって，命題 43.12 (a) により，$L_b(E, F)$ から誘導される $E' \otimes F$ 上のノルムは $\leqq \| \ \|_\pi$ となる．ゆえに，$E' \otimes F$ から $L_b(E, F)$ への自然単射は，$E' \hat{\otimes}_\pi F$ から $L_b(E, F)$ への連続線形写像に拡張される．この拡張されたものを標準的写像と云うことにしよう．$E \hat{\otimes}_\pi F$ から $L_b(E, F)$ へのこの標準的写像は，いままでに考察されているすべての場合において単射的であることが示されているが，これがつねに単射的であるかどうかは未知である．

定義 47.2. E, F を二つの Banach 空間とするとき，$E' \hat{\otimes}_\pi F$ の $L_b(E, F)$ における像[1] を $L^1(E, F)$ で示す．$L^1(E, F)$ の各元を，E から F への**核型写像** (nuclear mapping) とよぶ．

$L^1(E, F)$ は，ベクトル空間として，$E' \hat{\otimes}_\pi F/N$ に同形である．ここで，N は標準的写像 $E' \hat{\otimes}_\pi N \to L_b(E, F)$ の核である．上に述べた商空間は (Banach 空間の閉部分空間を法とする商空間として) Banach 空間である．$E' \hat{\otimes}_\pi F/N$ のノルムを $L^1(E, F)$ に移して考えたものを $L^1(E, F)$ 上の**トレース・ノルム** (trace-norm) とよぶ (この名称の由来は後に明らかになる)．云うまでもないが，トレース・ノルムを $E' \otimes F$ に制限したものは，π-ノルムよりも小さい[2]．

さて，核型作用素の定義を，E, F が Banach 空間とは限らない一般の局所凸 Hausdorff 空間の場合について述べよう．

U を E における 0 の凸平衡的閉近傍とし，B を F の凸平衡的劣完備有界集

1) 標準的写像による像．

2) さらに $L_b(E, F)$ のノルムよりも大きい．

合とする．$u:\widehat{E}_U\to F_B$ を連続線写像とするとき，写像 $\tilde{u}:E\to F$ を，列

$$E\xrightarrow{h_U}\widehat{E}_U\xrightarrow{u}F_B\xrightarrow{i_B}F$$

の合成として定義する．ここで，h_U は標準的写像 $E\to\widehat{E}_U$ であり，i_B は自然単射である． この対応 $u\mapsto\tilde{u}$ は，$L(\widehat{E}_U;F_B)$ から $L(E;F)$ への単射となる．なぜなら，$\tilde{u}=0$ とすれば，u は $h_U(E)$ 上で0となるが，$h_U(E)$ は $\widehat{E}_U$ において稠密だから，$u=0$ を得るからである． 今後，$L(\widehat{E}_U;F_B)$ を $L(E;F)$ の線形部分空間と見なす．

定義 47.3. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とし，$\mathfrak{U}$ を E における0のすべての凸平衡的閉近傍の族，$\mathfrak{B}$ を F のすべての凸平衡的劣完備有界集合の族とする．

U が $\mathfrak{U}$ の中を動き，B が $\mathfrak{B}$ の中を動くときに得られる部分空間［次の列の左端の空間］

$$L^1(\widehat{E}_U;F_B)\subseteq L(\widehat{E}_U,F_B)\subseteq L(E;F)$$

の合併集合を $L^1(E;F)$ で表わし，その各元を E から F への**核型写像**とよぶ．

E, F が Banach 空間とすれば，$\widehat{E}_U$ はすべて E に同形である[1)]（TVS としての同形，Banach 空間としての同形とは限らない）． ところで，$L^1(E;F_B)$ は，単射 $F_B\to F$ との合成によって，$L^1(E;F)$ に標準的に埋め込まれる． これは，E, F が Banach 空間のときには，定義 47.3 は定義 47.2 と一致することを意味している（これは当然そうあるべきことである）． 一般の場合（E, F が Banach 空間とは限らぬ場合）には，$L^1(E;F)$ がベクトル空間をなすことは，直ちに明らかというわけではない． このことは次の諸命題から明らかとなる．しかし，これら諸命題の重要性は，このことだけにあるのではない．

命題 47.1. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とし，u を E から F への核型写像とする．G, H をもう二つの局所凸 Hausdorff 空間とし，$g:G\to E$,

1) U が有界である限りは．

$h: F \to H$ を連続線形写像とする．このとき，$h \circ u \circ g$ は核型写像である．

E, F, G, H を Banach 空間とするならば，

$$\|h \circ u \circ g\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \|h\| \; \|u\|_{\mathrm{Tr}} \|g\|$$

が成り立つ．

上において，$\| \;\; \|_{\mathrm{Tr}}$ はトレース・ノルムを表わす．

証　明　仮定によって，u は次の列に分解できる．

$$E \xrightarrow{h_U} \widehat{E}_U \xrightarrow{\tilde{u}} F_B \xrightarrow{i_B} F.$$

ここで，h_U, i_B は標準的写像であり，$\tilde{u}$ は核型である．g による U の逆像（これは G の部分集合）を V と書こう．V に付随するセミノルムを $\mathfrak{q}$ とする．すなわち，$\mathfrak{q}$ はセミノルム

$$G \ni z \mapsto \|h_U(g(z))\|$$

である．ここで，$\| \;\; \|$ は $\widehat{E}_U$ におけるノルムである．ところで，可換三角形

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{h_U} & \widehat{E}_U \\ {\scriptstyle k_V}\downarrow & & & \nearrow{\scriptstyle \tilde{g}} & \\ G_V/\mathrm{Ker}\, q & & & & \end{array}$$

において，k_V を標準的写像とするとき，$\tilde{g}$ は $h_U(g(G))$ の上への等距離写像となり，したがって $\widehat{G}_V$ から $h_V(g(G))$ の閉包 M の上への等距離写像 I に拡張することができることは明らかである．他方，$C = h(B)$ は H の凸平衡的有界集合であるが，さらに C は劣完備である．実際，直ちにわかるように，h の F_B への制限 $h|F_B$ は，Banach 空間 $F_B/(F_B \cap \mathrm{Ker}\, h)$ から H_C の上へ等距離写像 J を誘導するが，Banach 空間の等距離像は Banach は空間になるからである．かくして，結局，$h \circ u \circ g$ の次の列への分解が得られる．

$$G \xrightarrow{h_V} \widehat{G}_V \xrightarrow{I} M \xrightarrow{\tilde{u}|M} F_B \xrightarrow{J} H_C \xrightarrow{j_C} H$$

ここで記号の意味は明瞭であろう．k_V, j_C は標準的写像であり，I, J は上に定義した等距離写像であり，$\tilde{u}|M$ は $\tilde{u}$ の M への制限である．残っている示すべきことは，$J \circ \tilde{u}|M \circ I$ が核型になることである．このようにして，関係する空間がすべて Banach 空間であって，g と h が上への等距離写像である場合に

帰着した[1].

このようにして，可換図式

$$
(47.1)\qquad
\begin{array}{ccccc}
E'\widehat{\otimes}_\pi F & \longrightarrow & L^1(E\,;\,F) & \longrightarrow & L(E\,;\,F)\\
{\scriptstyle {}^t g\otimes h}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (*)}\\
G'\widehat{\otimes}_\pi H & \longrightarrow & L^1(G\,;\,H) & \longrightarrow & L(G\,;\,H)
\end{array}
$$

を得る．ここで，横向きの矢印はすべて標準的写像であり，(*) は写像 $v\mapsto h\circ v\circ g$ であって，上への等距離写像である．中央の縦向きの矢印は，明らかに，上への等距離写像でなければならない．この等距離写像による $u\in L^1(E\,;\,F)$ の像は，もちろん $h\circ u\circ g$ であって，それは $L^1(G\,;\,H)$ に属する．

関係する空間はすべて Banach 空間としておいて，ノルムに関することを証明せねばならない．このために，図式 (47.1) にもどって考える．ただし，g, h は上への等距離写像とは限らないとする[単に，連続線形写像とする]．このとき，縦向きの矢印も単なる連続線形写像となる．ところで (命題 43.13 によって)，$\|{}^t g\otimes h\|_\pi\leqslant\|{}^t g\|\ \|h\|$ である．もちろん，$\|{}^t g\|=\|g\|$. いま，$\theta\in E'\widehat{\otimes}_\pi F$ が核型写像 u を定義するとすれば，$h\circ u\circ g$ は $({}^t g\otimes h)(\theta)$ によって定義される．したがって，

$$\|h\circ u\circ g\|_{\mathrm{Tr}}\leqslant\|({}^t g\otimes h)(\theta)\|_\pi\leqslant\|g\|\ \|h\|\ \|\theta\|$$

を得るが，$\|\theta\|_\pi$ を $\|u\|_{\mathrm{Tr}}$ に任意に近くとることによって，求める不等式が得られる．(証終).

次の結果は，ある種の作用素が核型であることを示すのを容易にする．

命題 47.2. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とし，$u:E\to F$ を連続線形写像とする．このとき，次の諸条件は同値である．

(a) u は核型である

(b) u は連続線形写像の列

---

1) ここで，核型写像 $\tilde{u}$ の M への制限 $\tilde{u}|M$ は核型である．それは，定義に帰って考えれば，ただちにわかる．実際，一般に E, F を Banach 空間，M を E の閉線形部分空間，$\varphi:E'\widehat{\otimes}_\pi F\to L(E, F)$, $\psi:M'\widehat{\otimes}_\pi F\to L(M, F)$ を標準写像，$\rho:E'\to M'$ を制限写像，$\tilde{\rho}$ を ρ から導かれる $E'\widehat{\otimes}_\pi F$ から $M'\widehat{\otimes}_\pi F$ への連続線形写像とすれば，任意の $\theta\in E'\widehat{\otimes}_\pi F$ に対して，$\psi(\tilde{\rho}(\theta))$ は写像 $\varphi(\theta)$ の M への制限に等しいからである．

$$E \xrightarrow{f} E_1 \xrightarrow{v} F_1 \xrightarrow{g} F$$

の合成である．ただし，E_1, F_1 は Banach 空間であって，v は核型である．

(c) E' における同等連続点列 $\{x_k'\}$, F の凸平衡的劣完備有界集合 B に含まれる点列 $\{y_k\}$, 複素数列 $\{\lambda_k\}$ で $\sum_k|\lambda_k|<+\infty$ となるものが存在して，u は写像

(47.2) $$x \mapsto \sum_k \lambda_k\langle x_k', x\rangle y_k$$

に等しい．

E, F が共に Banach 空間のときには，u が核型になるための必要十分条件は，E' の閉単位球に含まれる列 $\{x_k'\}$, F の閉単位球に含まれる列 $\{y_k\}$, 複素数列 $\{\lambda_k\}$ で $\sum_k|\lambda_k|<+\infty$ となるものが存在して，u は (47.2) であたえられることである．さらに，u のトレース・ノルム $\|u\|_{\mathrm{Tr}}$ は，(47.2) の形の u のすべての表現に対する数 $\sum_k|\lambda_k|$ の下限に等しい．

証　明　(a) ⇒ (b) は自明である．(b) ⇒ (a) は命題 47.1 から明らか．他方，定理 45.1 から (a) ⇒ (c) を得る[1]．逆に，列 $\{x_k'\}$ の凸平衡的弱閉包を H' とすれば，H' は E' の同等連続部分集となり，$\sum_k \lambda_k x_k' \otimes y_k$ は $E_{H'} \hat{\otimes}_\pi F_B$ において絶対収束する．したがって，(c) ⇒ (a) を得る．E が Banach 空間のときには，E' の閉単位球は E' の同等連続集合であって，凸平衡的弱閉集合である．F が Banach 空間ならば，その閉単位球は劣完備である．最後に，トレース・ノルムに関する結果は，その定義からの直接の帰結である．(証終)．

系 1. E を樽型，F を準完備とするとき，u が核型になるための必要十分条件は，u が (47.2) の表現をもち，列 $\{x_k'\}$ が E' において有界，列 $\{y_k\}$ が F において有界とできることである．

証　明　E は樽型だから，E' の有界集合は同等連続となる (定理 33.2)．F は準完備だから，有界集合 (ここでは列 $\{y_k\}$) の閉凸平衡包は完備であり，したがって劣完備である (補題 36.1)．

---

1) まず，v に定理 45.1 を適用してその級数表示を得るが，それを ${}^tf$ と g で変換すれば，u の表示を得る．

系 2. E, F を局所凸 Hausdorff 空間とするとき，$L^1(E; F)$ は $L(E, F)$ の線形部分空間となる.

証　明　$u_1, u_2 : E \to F$ を二つの核型写像とすれば，次の図式を得る(この図式は可換ではない!).

$$\begin{array}{ccccccc} & & E_1 & \xrightarrow{v_1} & F_1 & & \\ & \nearrow^{f_1} & & & & \nwarrow^{g_1} & \\ E & & & & & & F \\ & \searrow_{f_2} & & & & \swarrow_{g_2} & \\ & & E_2 & \xrightarrow{v_2} & F_2 & & \end{array}$$

ここで，すべての写像は線形連続であり，E_i, F_i $(i=1, 2)$ は Banach 空間，v_1, v_2 は核型である. さらに，上の径は u_1 を，下の径は u_2 をあたえる. そこで，G, H をそれぞれ積 Banach 空間 $E_1 \times E_2$, $F_1 \times F_2$ とし，f を写像 $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$，$g$ を写像 $(y_1, y_2) \mapsto g_1(y_1) + g_2(y_2)$ とすれば，次の列を得る.

$$E \xrightarrow{f} G \xrightarrow{v} H \xrightarrow{g} F$$

を得る. ここで，$v = (v_1, v_2) : (x_1, x_2) \mapsto (v_1(x_1), v_2(x_2))$ とする. この列は連続線形写像からなり，$u = u_1 + u_2$ の分解をあたえる. したがって，v が核型ならば，u は核型となる[1]. いま，v_i は元 $\theta_i \in E_i' \hat{\otimes}_\pi F_i$ $(i=1, 2)$ によって定義されるとしよう. $(E_1' \otimes F_1) \times (E_2' \otimes F_2)$ から $(E_1' \times E_2') \otimes (F_1 \times F_2)$ への標準的写像 $((\sum_j x'_{1j} \otimes y_{1j}), (\sum_k x'_{2k} \otimes y_{2k})) \mapsto \sum_{j,k} (x'_{1j}, x'_{2k}) \otimes (y_{1j}, y_{2k})$ は，直ちにわかるように，すべてのテンソル積に射影位相を入れたとき，連続となる. したがって，この標準写像は，完備化にまで拡張することができる. 容易にわかるように，この拡張写像による (θ_1, θ_2) の像 $\theta \in (E_1' \times E_2') \hat{\otimes}_\pi (F_1 \times F_2)$ は v を定義する. したがって，v は核型である. (証終).

次の定義を導入しよう. これは，Hilbert (或は Banach) 空間の理論において，お馴染のものである.

1)　u が核型ならば，その各成分 u_i $(i=1, 2)$ が核型になることは，定理 47.1 から明らか [すなわち，u と射影写像の合成として].

定義 47.4. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とするとき，線形写像 $u:E\to F$ が**コンパクト** (compact) (或は**完全連続** (completely continuous)) であるとは，E における 0 の近傍 U が存在して，$u(U)\subseteq F$ がプレコンパクトになることを云う[1)].

命題 47.3. 核型写像はコンパクトである．

証明 これには，命題47.2における (a)⇒(c) の証明にもどればよい．定理45.1を全面的に利用するならば，点列 $\{y_k\}$ は F_B において 0 に収束するようにとることができる．したがって，それはもちろん F においても 0 に収束する．この列の閉凸包 Γ はプレコンパクトである (命題7.11)．いま，同等連続列 $\{x_k'\}$ の極集合を U とすれば，U は E の 0 の近傍であり，$x\in U$ ならば

$$u(x)=\sum_k \lambda_k\langle x_k', x\rangle y_k\in\Gamma$$

となる．(証終)．

次に，核型写像の転置を考察しよう．

命題 47.4. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とし，u を E から F への核型写像とする．

このとき，E', F' に強双対位相を入れて考えれば，${}^t u: F'\to E'$ は核型写像となる．

Banach 空間の場合，トレース・ノルムに関して，次のことが成り立つ．

命題 47.5. E, F を Banach 空間とするとき，$u\in L^1(E;F)$ ならば，${}^t u\in L^1(F';E')$ であり，$\|{}^t u\|_{\mathrm{Tr}}\leqslant\|u\|_{\mathrm{Tr}}$ が成り立つ．

命題 47.5 の証明 $u\in L^1(E;F)$ は，或る元 $\theta\in E'\widehat{\otimes}_\pi F$ によって定義される．いま，θ は絶対収束級数

1) 普通には，このような u はプレコンパクト写像と言う．コンパクト写像とは，$u(U)$ が F で相対コンパクトになるときに言うことが多い．

$$\theta=\sum_{j=0}^{\infty}x_j'\otimes y_j$$

に等しいとすれば，${}^t u$ は写像

$$y'\mapsto\sum_{j=0}^{\infty}\langle y',y_j\rangle x_j'$$

に等しい．換言すれば，${}^t u$ は元 $(I\widehat{\otimes}_\pi i)(\theta)\in E'\widehat{\otimes}_\pi F''$ によって定義される．ただし，I は E' の恒等写像であり，i は F から F'' への標準的等距離写像 $x\mapsto$‘x における値’ である．ゆえに，命題 43.13 により，

$$\|(I\widehat{\otimes}_\pi i)(\theta)\|_\pi\leqslant\|\theta\|_\pi$$

を得る．この両辺において，θ が u の代表元の集合の中を動いたときの下限をとることによって，$\|{}^t u\|_{\mathrm{Tr}}\leqslant\|u\|_{\mathrm{Tr}}$ を得る．

系． E, F を Banach 空間とし，F は回帰的とする．このとき u が核型であるための必要十分条件は，${}^t u$ が核型になることである．さらに，$\|u\|_{\mathrm{Tr}}=\|{}^t u\|_{\mathrm{Tr}}$ が成り立つ．

${}^t u: F'\to E'$ が核型とすれば，${}^{tt}u: E''\to F''$ が核型になるから，$u: E\to E''\xrightarrow{{}^{tt}u}F''\cong F$ が核型となる．ここで，最初の矢印は標準的等距離写像である．さらに，命題 47.5 により，$\|u\|_{\mathrm{Tr}}\leqslant\|{}^{tt}u\|_{\mathrm{Tr}}\leqslant\|{}^t u\|_{\mathrm{Tr}}$ を得るが，これから直ちに $\|u\|_{\mathrm{Tr}}=\|{}^t u\|_{\mathrm{Tr}}$ を得る．

注意 47.1． 上の系の結論は，知られているすべての場合において，たとえ F が回帰的でなくても，成り立っている．

命題 47.4 の証明　ここでは，E と F は局所凸 Hausdorff 空間であって，必ずしも Banach 空間とは限らない．いま，$u: E\to F$ を核型とすれば，二つの Banach 空間 E_1, F_1，二つの連続線形写像 $f: E\to E_1$，$g: F_1\to F$，核型写像 $v: E_1\to F_1$ が存在して，$u=g\circ v\circ f$ となる（命題 47.2）．このとき，命題 47.5 によって，${}^t u={}^t f\circ{}^t u\circ{}^t g$ もまた核型となる．

核型写像に関するこれらの一般的性質の最後として，核型写像の拡張と持ち

上げに関する二つの結果を述べおこう．

命題 47.6. E, F, G を三つの局所凸 Hausdorff 空間として，j を E から F への同型写像とする．

(1) 核型写像 $u: E\to G$ を任意にあたえれば，核型写像 $v: F\to G$ が存在して，$v\circ j=u$ となる．

(2) $j(E)\subseteq F$ が閉として，ϕ を F から $F/j(E)$ の上への標準的写像とする．さらに，$F/j(E)$ の凸平衡的コンパクト集合は，すべて F の凸平衡的劣完備有界集合の ϕ による像になっているとする．このとき，任意の核型写像 $u: G\to F/j(E)$ に対して，核型写像 $v: G\to F$ が存在して，$\phi\circ v=u$ となる．

E, F が Banach 空間であって，j が等距離写像のときには，任意の $\varepsilon>0$ に対して，v は ((1) においても (2) においても)

$$\|v\|_{\mathrm{Tr}}\leqslant\|u\|_{\mathrm{Tr}}+\varepsilon$$

となるようにえらぶことができる．

(1) の証明 写像 u は元 θ

$$\theta=\sum_k \lambda_k x_k{}'\otimes z_k$$

の標準写像による像とする．ここで，$\{x_k'\}$ は E' における同等連続列をなすとし，列 $\{z_k\}$ は G の或る劣完備有界集合に含まれているとする．例によって，列 $\{\lambda_k\}$ は l^1 に属するとする (命題 47.2)．Hahn-Banach の定理を適用すれば，列 $\{x_k'\}\subseteq E'$ は同等連続列 $\{y_k'\}\subseteq F'$ に持ち上げることができる．E と F が Banach 空間のとき (そして j が等距離写像のとき) には，各 k について y_k' は x_k' と同じノルムをもつようにえらぶことができる．このとき，v としては，元

$$\tilde{\theta}=\sum_k \lambda_k y_k{}'\otimes z_k$$

によって定義されるものをとればよい．E, F が Banach 空間 (そして，j が等距離写像) のときには，x_k', y_k', z_k はそれぞれ E', F', G の単位球に含まれるようにえらぶことができる．そのとき

$$\|v\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \sum_k |\lambda_k|$$

が成り立ち，この右辺は $\leqslant \|u\|_{\mathrm{Tr}}+\varepsilon$ となるようにすることができる (命題 47.2).

(2) の証明も同様であり，読者にこれを委ねる.

注意 47.2. E, F が Fréchet 空間ならば，$F/j(E)$ のコンパクトな凸平衡的集合はすべて F のコンパクトな凸平衡的集合の像である (補題 45.1). このことは，F が Fréchet 空間の強双対であり，$j(F)$ が F で弱閉のときにも成り立つ.

これらの一般性質を終えるに当って，いわゆる**トレース形式** (trace form) について若干述べておこう．それは $E' \widehat{\otimes}_\pi E$ 上の連続線形汎関数である．ただし，E は Banach 空間とし，E' は E の強双対となる Banach 空間 (に双対ノルムを入れたもの) である．$(x, x') \mapsto \langle x', x\rangle$ は $E' \times E$ 上の連続双線形形式であって，そのノルムは1であることに注意しよう．したがって，それには $E' \widehat{\otimes}_\pi E$ 上の連続線形形式が対応する．これを Tr(.) で表わし，トレース形式とよぶ．Tr のノルムは1である．もし

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} x_k' \otimes x_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k'\| \, \|x_k\| < +\infty$$

ならば，

$$\mathrm{Tr}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k', x_k\rangle$$

である．トレース形式という名称の由来は，次のことにある．$\theta \in E' \otimes E$ ならば

$$\theta = \sum_{i,j=1}^{r} \theta_{ij} e_j' \otimes e_i$$

と書くことができる．ここで，$i=j$ ならば $\langle e_i', e_j\rangle = 1$ であり，その他のときは $\langle e_i', e_j\rangle = 0$ とする．このとき，

$$\mathrm{Tr}(\theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_{ii}$$

となるが，これは θ によって定義される E からそれ自身への線形写像の，普通

の意味での，トレースである．

例. Banach 空間から L^1 への核型写像

X を1つの集合とし，dx をその上の正測度とする．dx は σ-有限として，L^1 を可積分関数（の同値類）全体のなす空間とする．E を Banach 空間とし，E' をその双対 Banach 空間とする．このとき，標準的等距離関数［同形］

$$L^1(E') \cong E' \widehat{\otimes}_\pi L^1 \qquad (\text{定理 } 46.2)$$

が成り立つ．E から L^1 への核型写像の空間の上への $E' \widehat{\otimes}_\pi L^1$ からの標準写像を用いるならば，任意の可積分関数の同値類 $\mathbf{f} \in L^1(E')$ は［E から L^1 への］一つの核写像を定義する．すなわち，

$$u_\mathbf{f} : \mathbf{e} \mapsto (x \mapsto \langle \mathbf{f}(x), \mathbf{e} \rangle)$$

である．$\mathbf{f} \mapsto u_\mathbf{f}$ は上への写像である．さらに，この写像は単射である．なぜなら，

$$\int |\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{e} \rangle| dx = 0 \qquad (\text{すべての } \mathbf{e} \in E \text{ について})$$

となるための必要十分条件は，$\mathbf{f}$ の代表元が殆どいたるところ0になることだからである．ところで，$\mathbf{f} \mapsto u_\mathbf{f}$ が単射ならば，核型作用素にはトレース・ノルムを考えるとき，それは上への等距離写像である．実際，このとき，$E' \widehat{\otimes}_\pi L^1$ から $L^1(E; L^1)$ の上への標準写像は単射的となり，トレース・ノルムはこの写像の核を法とする π-ノルムの商ノルムだからである．かくして

$$\|u_\mathbf{f}\|_{\mathrm{Tr}} = \int \|\mathbf{f}(x)\| dx$$

を得る．読者はこれらのことを，E 自身が L^p 空間 $(1 \leqslant p < +\infty)$ のときに適用して見るとよい．

48.

Hilbert 空間における核型作用素

E, F を二つの Hilbert 空間とし，u を E から F への連続線形写像，J (或は K) を E から E の双対 E' の上への (或は F から F' の上への) 標準的反線形等距離写像とする．写像の列

$$F \xrightarrow{K} F' \xrightarrow{{}^t u} E' \xrightarrow{J^{-1}} E$$

の合成写像を u の**共役** (adjoint) とよび，u^* によって表わす．u^* は F から E への連続線形写像であり，そのノルムは u のノルムに等しい (命題 23.3). E および F における内積とノルムを，共に $(\,|\,)$ と $\|\ \ \|$ で表わすならば，すべての $x \in E$ と $y \in F$ について

$$(u(x)|y) = (x|u(y))$$

が成り立つ．$E = F, u = u^*$ のときには，u は**自己共役** (self-adjoint) とよばれる．写像 $u \in L(E\,;\,E)$ が**正** (positive)[1] であるとは，すべての $x \in E$ について $(u(x)|x) \geqslant 0$ となることを云う．正の作用素は自己共役である．実際，双線形形式 $(u(x)|y)$ が，$x = y$ のとき実数値をとるからである (上巻 139 頁参照). 正の作用素のよく知られた重要な性質を述べよう．

補題 48.1. $u \in L(E, E)$ が正とすれば，一意的に定まる正作用素 $v \in L(E, E)$ が存在して，$v^2 = u$ となる．

証　明　関数

$$\mathbf{C} \ni z \mapsto (1-z)^{1/2}$$

---

1) 非負定符号 (non-negative definite) とも言う．

の $z=0$ のまわりの Taylor 展開の係数を調べて見れば，この Taylor 級数は $|z|=1$ のときにも収束することがわかる[1]．このことから直ちにわかることは，有限 Taylor 級数において z を $w\in L(E\,;\,E)$, $\|w\|\leqslant 1$ でおきかえたものが，$L_b(E\,;\,E)$ において一つの連続線形写像に収束することである．この写像を $(I-w)^{1/2}$ で表わすのは，自然である．この写像は，w に関する多項式の（作用素ノルムの意味での）極限だから，w と可換な任意の連続線形写像と可換になることに注意しょう．同じ理由によって，w が自己共役ならば，$(I-w)^{1/2}$ も自己共役である．そして，もちろん $((I-w)^{1/2})^2=I-w$ が成り立つ．このことから，w が正ならば，$w(I-w)=((I-w)^{1/2})w((I-w)^{1/2})$ もまた正であることが導かれる．したがって

$$\|(I-w)x\|^2=((I-w)x|x)-(w(I-w)x|x)\leqslant\|(I-w)x\|\ \|x\|$$

を得るが，このことから，w が正で $\|w\|\leqslant 1$ ならば，$\|I-w\|\leqslant 1$ となることがわかる．ゆえに，

$$(I-(I-w))^{1/2}$$

を考えることができるが，これを $\sqrt{w}$ と書くのである．そうして，もし $\|u\|$ が任意ならば，$\sqrt{u}=\|u\|^{1/2}(\|u\|^{-1}u)^{1/2}$ とおく，これで，補題 48.1 に述べた写像 v（それをいまの $\sqrt{u}$ とする）の存在が証明された．

---

1) 二項定理によれば，$|z|<1$ のとき

$$(*)\qquad (1-z)^{1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_n z^n$$

と展開できるが，$a_0=1$, $a_k<0$ $(k\geqslant 1)$ となることがわかる $\left(\text{実際計算により } a_k=(-1)^k\times\binom{1/2}{k}=\frac{(-1)}{2k-1}\frac{1}{4^k}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\right)$．そこで $c_k=-a_k$ $(k\geqslant 1)$ とおけば，$c_k>0$ であって

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^k=1-(1-z)^{1/2},\qquad (|z|<1)$$

となる．とくに，任意の n と任意の z $(0\leqslant z<1)$ に対して $\sum_{k=1}^{n}c_k z^k\leqslant 1$ を得るが，$z\to 1$ として

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\leqslant 1$$

を得る．これは，正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ が収束することを示す．このことから，(*) は $|z|=1$ のときにも成り立つことがわかる．なぜなら，(*) の両辺は $|z|\leqq 1$ において連続になるし，$|z|<1$ では一致するからである．

さて，もう一つ正の写像 $w \in L^2(E; E)$ が存在して，$w^2 = u$ となったとしょう．w は u と可換だから，上の考察から，$\sqrt{u}$ とも可換となる．このことから

$$0 = w^2 - (\sqrt{u})^2 = (w - \sqrt{u})(w + \sqrt{u})$$

を得る．この右辺をベクトル $x \in E$ に施すことによれば，$(w + \sqrt{u})$ の像の上では，$w = \sqrt{u}$ となることがわかる．この像の直交は $(w + \sqrt{u})$ の核である（この作用素は自己共役だから）が，それは $\mathrm{Ker}\, w$ と $\mathrm{Ker}\sqrt{u}$ の共通部分である（w も $\sqrt{u}$ も正だから）．この共通部分においては，自明的に $w = \sqrt{u}$ である．

（証終）．

系． u を正作用素とする．$x \in E$ が方程式 $(u(x), x) = 0$ を満たすならば，$u(x) = 0$ が成り立つ．

証　明． v を $v^* v = u$ となる作用素とするならば，$(u(x), x) = \|v(x)\|^2$ だから，$v(x) = 0$ から $u(x) = v^*(v(x)) = 0$ を得る．

補題 48.1 の作用素 v を $\sqrt{u}$ で表わし，u の**正平方根** (positive square root) と云う．

さて，一つの Hilbert 空間 E からもう一つの Hilbert 空間 F への任意の連続線形写像 u を考察することにしょう．u の共役作用素を u^* で示す．このとき，$u^* u$ は E から E への正作用素である．その正平方根を R としょう．そうすれば，すべての $x \in E$ に対して $\|R(x)\| = \|u(x)\|$ であり，したがって $\mathrm{Ker}\, R = \mathrm{Ker}\, u$ である．そこで，次の連続線形写像 $U : E \to F$ を定義する．

$$U(x) = u(x_1), \qquad (x = R(x_1) \in \mathrm{Im}\, R)^{1)}.$$

こうすれば，U は連続性によって $\mathrm{Im}\, R$ の閉包 $\overline{\mathrm{Im}\, R}$ まで定義が拡張される．また

$$U(x) = 0, \qquad (x \in \mathrm{Ker}\, R)$$

1) これが $\mathrm{Im}\, R$ 上での U の定義になっていることは $\mathrm{Ker}\, R = \mathrm{Ker}\, u$ による．さらに $\|U(x)\| = \|u(x_1)\| = \|R(x_1)\| = \|x\|$ だから連続．

と定義する[1]. このとき，すべての $x \in E$ に対して

$$\|U(R(x))\| = \|u(x)\| = \|R(x)\|$$

が成り立つ. これは，U が $\mathrm{Im}\, R$ から $\mathrm{Im}\, u$ の上への等距離写像であることを意味している. そうして

$$u = U \circ R$$

が成り立つ. R はしばしば u の**絶対値** (absolute value) とよばれる.

われわれの目的は，すべての核型作用素 $u : E \to F$ を考察して，それの特徴づけをあたえることにある. ところで，上述の U の等距離性によって，u が核型であるための必要十分条件は，その絶対値 R が核型になることである. 換言すれば，Hilbert 空間 E からそれ自身への正作用素であるような核型作用を考察すれば十分である，核型作用素はコンパクトであることを知っているから，したがって，コンパクト正作用素に考察を限ってよいことになる. 今世紀のはじめに EFredholm と F. Riesz によって発見されたように，これらの作用素は単純で美しいスペクトル的性質をもっている.

Hilbert 空間論の教科書を手近にもっていない読者の便宜のために，コンパクト正作用素に関する主定理とその証明を，ここに述べておこう.

定理 48.1. E を Hilbert 空間とし，u を E からそれ自身への [恒等的には 0 でない] コンパクト正作用素とする. このとき，正数からなる有限列または 0 に収束する減少列

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k > \cdots$$

と，E の 0 でない有限次元部分空間列 V_k $(k = 1, 2, \ldots)$ が存在して，次の性質をもつ.

(1) 部分空間 V_k はたがいに直交している.

(2) 各 k と任意の $x \in V_k$ について，$u(x) = \lambda_k x$.

(3) 部分空間列 V_k の合併が張る部分空間の直交は，u の核に等しい.

---

1) $\overline{\mathrm{Im}\, R}$ の直交補空間は明らかに $\mathrm{Ker}\, R$ だから，線形性によって，U は E 全体で定義されたことになる.

証　明． E の単位球面上における非負関数 $(u(x)|x)$ の上限を t と書こう．E の閉単位球が弱コンパクトであること（命題 34.1）を用いれば[1]，弱収束列 $\{x_\nu\}$ が存在して，$\|x_\nu\|=1$, $(u(x_\nu)|x_\nu)\to t$ となる．ところで，u 自身がコンパクト作用素だから，列 $\{u(x_\nu)\}$ はノルムの意味で収束すると仮定してよい．このことから直ちにわかることは，x_ν の（弱）極限を x とするとき，$(u(x)|x)$ は $(u(x_\nu)|x_\nu)$ の極限すなわち t に等しいことである．かくして

$$((tI-u)(x)|x)=0$$

を得る．ここで，t の選らび方から，$tI-u$ は正作用素である．さて，（一般に）v を正作用素とするとき，もし $(v(x)|x)=0$ ならば $v(x)=0$ を得る．実際，$(v(x)|x)=\|\sqrt{v}(x)\|^2$ であり，$\sqrt{v}(x)=0$ ならば $(\sqrt{v})^2(x)=0$ となるからである．かくして

$$u(x)=tx$$

を得る．さて，$u(x)=tx$ となる元 $x\in E$ のなす線形部分空間を V_1 で表わそう．B_1 を V_1 の単位球，すなわち E の単位球と V_1 の共通部分とする．仮定によって B_1 はプレコンパクトとなるが，それは tB_1 に等しいから，それは閉，したがってコンパクトとなる[2]．かくして，V_1 は有限次元である．今後 t の代りに λ_1 と書くことにする．V_1 の直交を $V_1{}^\perp$ とすれば，u が自己共役であることから，$u(V_1{}^\perp)\subseteq V_1{}^\perp$ を得る．したがって，$V_1{}^\perp$ への制限を考えることによって，u は $V_1{}^\perp$ からそれ自身自身への連続線形写像を定義するが，それは明らかにコンパクトかつ正である．したがって，上の議論を E を $V_1{}^\perp$ で置き換えて繰返すことができる．

$V_1{}^\perp$ の単位球面上における関数 $(u(x)|x)$ の最大値を λ_2 とすれば，$\lambda_2<\lambda_1$ である，なぜなら，そうでないとすると，この単位球面上に一つの元 x が存在して $u(x)=\lambda_1 x$ となるが，この x は V_1 に属することになるからである．このようにして，列 $\{\lambda_k\}$ と $\{V_k\}$ を k についての帰納法によって構成することができる．ここで，$V_k=\{x\in E\,;\,u(x)=\lambda_k x\}$ である．この構成の操作が有限回，

1) 演習問題 32.11 および 566 頁の脚注参照．

2) ここで，$t\neq 0$ なること，すなわち u が恒等的には 0 でないことを用いている．

たとえばk回で停止したとすれば，それは $V_1+\cdots+V_k$ の直交上において，関数 $(u(x)|x)$ の最大値が0に等しいことを意味する．そのとき，この直交はuの核に一致する（この場合には，u の像は有限次元となる）．もし，この構成の操作が有限回では止まらないとするならば，減少数列 $\{\lambda_k\}$ は0に収束しなければならない．もし，そうでないとするならば，ベクトルの直交列 x_ν をえらんで，$u(x_\nu)=\lambda_{k_\nu}x_\nu$, $\lambda_{k_\nu}\geqslant c>0$ とできることになるが，uはコンパクトだから，列 $\{u(x_\nu)\}$ は収束する部分列を含むことになる．しかし，これは

$$\|u(x_\nu)-u(x_\mu)\|^2=\lambda_{k_\nu}^2+\lambda_{k_\mu}^2\geqslant 2c^2$$

によって不合理である．

最後に，もし元 $x\in E$ がすべての V_k に直交するならば，これらの部分空間の定義から，$(u(x)|x)=0$ を得る．ゆえに $u(x)=0$ となる．（証終）．

ここで，よく知られた用語を復習しておこう．数 λ_k はuの**固有値** (eigenvalue) とよばれ，V_k は固有値 λ_k に属するuの**固有空間** (eigenspace) とよばれる．$\dim V_k$ のことを，固有値 λ_k の**重複度** (multiplicity) とよぶことがある．級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\dim V_k$$

の和のことをuの**トレース** (trace) とよび，$\mathrm{Tr}\,u$ で表わす．各kについて，P_k をEから V_k の上への直交射影（上巻148頁）とすれば，有限和

$$\sum_{k=1}^{k}\lambda_kP_k$$

は $K\to\infty$ のとき，作用素ノルムに関してuに収束する．すなわち

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kP_k \tag{48.1}$$

と書くことができる．この表現式をuの**スペクトル分解** (spectral decomposition) とよぶ．この記号においては無限級数を用いているが，もしuの像が有限次元ならば，この式は有限級数を表わすと理解すべきである．

さて，Hilbert 空間における核型作用素に関して，主定理を述べて証明しょ

う．

定理 48.2. E, F を二つの Hilbert 空間とし，$u: E \to F$ を連続線形写像，R をその絶対値とする．

このとき，次の三条件は同値である．

(a) u は核型である．

(b) R は核型である．

(c) R はコンパクトで，$\mathrm{Tr}\, R$ は有限である．

さらに，u が核型のとき，$\mathrm{Tr}\, R$ は $\|u\|_{\mathrm{Tr}}$ に等しい．

証　明． すでに指摘したように，$u = U \circ R$ と書くことができて，U は $R(E)$ から $u(E) \subseteq F$ の上への等距離写像である．したがって，(b) と (c) の同値なことと，R が核型のとき $\mathrm{Tr}\, R$ が $\|R\|_{\mathrm{Tr}}$ に等しいことを証明すれば十分である．換言するならば，$u \in L(E; E)$ であって，u は正であると仮定してよい．

u を核型とするならば，u はコンパクトだから (命題 47.3)，スペクトル分解

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$$

が成りたつ．そこで，有限和

$$u_K = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k P_k$$

を考えれば，これはノルムの意味で u に収束する．$Q_K = P_1 + \cdots + P_K$ とおけば，$u_K = Q_K u$ が成りたつ．したがって (命題 47.1)，

$$\|u_K\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \|Q_K\| \ \|u\|_{\mathrm{Tr}} = \|u\|_{\mathrm{Tr}}$$

を得る．他方，トレース形式 (608 頁参照) は $E' \widehat{\otimes}_\pi E$ 上のノルム 1 の連続線形形式であった．写像 $u: E \to E$ が元 $\theta \in E' \otimes E$ によって定義されるときには，$\|u\|_{\mathrm{Tr}} = \|\theta\|_\pi$ となること [1] を用いるならば，

$$|\mathrm{Tr}(u_K)| \leqslant \|u_K\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \|u\|_{\mathrm{Tr}}$$

を得る．ところで，すでに指摘したように，元 $\theta \in E' \otimes E$ によって定義さ

1) 621 頁，定理 48.4 参照．

れる線形写像に対しては，トレース形式は通例の意味のトレースと一致するから

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k \dim V_k \leqslant \|u\|_{\mathrm{Tr}}$$

が成りたつ．ここで，$V_k = P_k(E)$ である．$K \to \infty$ とすれば，u のトレースが有限なことがわかる．これで (c) が証明された．

逆に，u がコンパクトであって，$\mathrm{Tr}\, u$ が有限であると仮定しょう．u のスペクトル分解 (48.1) を用いれば，

$$\|u\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \| P_k \|_{\mathrm{Tr}}$$

となることがわかる[1]．したがって，定理 48.2 の証明を完成するには，

$$\| P_k \|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \dim V_k, \qquad V_k = P_k(E)$$

を示せば十分である．V_k の一つの正規直交基底 $e_1, \ldots, e_r$ をえらべば，

$$P_k = \sum_{i=1}^{r} e_i' \otimes e_i$$

と書くことができる．ここで，e_i' は E 上の線形形式 $x \mapsto (x | e_i)$ である．したがって，命題 47.2 によって，

$$\| P_k \|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \sum_{i=1}^{r} 1 = \mathrm{Tr}(P_k) = \dim V_k$$

を得る．(証終)．

定理 48.1 が，トレース・ノルムという名称の由来であると考えてもよいであろう．u が Hilbert 空間 E からそれ自身への正核型写像のときには，u を作

1) この議論は少々乱暴に見えるかも知れない．詳しく述べるならば，次の通りである．トレース・ノルム $\| \ \|_{\mathrm{Tr}}$ は，$L(E\,;E)$ の部分空間 $L^1(E\,;E)$ 上のノルムであって，それに関して $L^1(E\,;E)$ は完備である．そこで，$u \in L(E\,;E)$, $u \notin L^1(E\,;E)$ のときには $\|u\|_{\mathrm{Tr}} = +\infty$ と定義するならば，その意味でこの不等式がつねに成り立つ．このことを証明するには，もちろん右辺が有限のときに行えば十分である．そのときには，有限和の列 $\{u_k\}_{k=1,2,\ldots}$ はトレース・ノルムに関して Cauchy 列をなすから，$L^1(E\,;E)$ の完備性によって，$\{u_k\}$ は $L^1(E\,;E)$ の一つの元にトレース・ノルムの意味で収束する．この収束は $L(E\,;E)$ における収束よりも強いから，その極限は (48.1) によって u に等しい．ゆえに，$u \in L^1(E\,;E)$ となり，(48.1) の収束はトレース・ノルムに関する収束となる．ところで，不等式は有限和に対して正しいから，上述のことより，極限へ行っても正しい．

用素と考えたときの（615 頁の意味）トレースはその写像 u を代表する一つの元 $\theta \in E' \widehat{\otimes}_\pi E$ のトレースに等しくなることに注意しょう．実際のところは，各 θ は一意的であること，換言すれば，$E' \widehat{\otimes}_\pi E$ から $L^1(E\,;\,E)$ の上への標準写像は単射的であることが証明できるのである[1]．したがって，トレース・ノルムの定義によって，標準写像は等距離写像となる．

定理 48.2 に対する次の系の証明は，読者に委せよう．

系． Hilbert 空間のあいだの連続線形写像 $u : E \to F$ が核型であるための必要十分条件は，E および F においてそれぞれ正規直交列 $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ が存在し，また l^1 に属する数列 $\{\lambda_k\}$ が存在して

$$u : x \mapsto \sum_k \lambda_k (x | x_k) y_k$$

と書けることである．

さて，今度は空間 $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ を考えよう（E と F は Hilbert 空間とする）．$E \otimes F$ 上の位相 ε は，$L_\varepsilon(E'_\tau\,;\,F)$ からの誘導位相であることを思い出そう．ところで，E' の同等連続部分集合は有界集合と一致するし，また E は回帰的だから，その弱相対コンパクト集合も有界集合と一致する．換言するならば，$L_\varepsilon(E'_\tau\,;\,F) = L_b(E'\,;\,F)$，すなわち有界線形作用素 $E' \to F$ の空間に作用素ノルム［による位相］を入れたものに等しい（E' にはその双対ノルムを入れる）．$E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ はと云えば，それは像が有限次元となるような連続線形写像全体のなす集合の作用素ノルムに関する閉包に等しい．

定理 48.3. E, F を Hilbert 空間とするとき，$E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ は E' から F へのコンパクト作用素全体のなす空間に一致する．

証　明． $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ はコンパクト作用素のなす集合に含まれている．実際，像が有限次元である作用はすべて明らかにコンパクト作用素であり，他方，次の一般的結果が成りたつからである．

1）下の定理 48.3 および定理 48.4（621 頁）参照．

補題 48.2. E, F を二つの Banach 空間とするとき，E から F へのコンパクト作用素全体のなす集合は，$L_b(E;F)$ において閉である．

証明. $u:E\to F$ をコンパクト作用素の列の（作用素ノルムに関する）極限とする．ε を任意の数 >0 とし，B を E の単位球，B_1 を F の単位球とするならば，コンパクト作用素 $v:E\to F$ が存在して，$(u-v)(B)\subseteq \varepsilon B_1$ となる．v のコンパクト性により，B の有限個の点 $x_1,\ldots, x_r$ が存在して

$$v(B)\subseteq (v(x_1)+\varepsilon B_1)\cup\cdots\cup(v(x_r)+\varepsilon B_1)$$

が成りたつ．ゆえに

$$u(B)\subseteq (u(x_1)+3\varepsilon B_1)\cup\cdots\cup(u(x_r)+3\varepsilon B_1)$$

を得る．これで補題の証明ができた．したがって，$E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ の各元はコンパクト作用素である．逆に，任意のコンパクト作用素 $u:E'\to F$ が $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ に属することを見るには，u が有限次元の像をもつ連続線形作用素の（作用素ノルムに関する）極限になっていることを示せば十分である．そこで，$u=U\circ R$ と書く；$R:E'\to E'$ はコンパクト正作用素，U は $R(E')$ から F への等距離写像である．そうして，R のスペクトル分解

$$R=\sum_k \lambda_k P_k \qquad ((48.1)\text{ 参照})$$

を利用しょう．写像列

$$u_K=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k U\circ P_k \qquad (K=1,2,\ldots)$$

は作用素ノルムに関して u に収束する．ところで，P_k は E' をその有限次元部分空間に写すから，$U\circ P_k(E)$ も有限次元である．ゆえに，u_K の像は有限次元となる．（証終）．

次に，空間 $B(E', F')$ を見てみよう．これは，$E'\times F'$ 上の連続双線形形式の空間に，その自然なノルム，すなわち E' の単位球と F' の単位球の積集合 $B'\times B_1'$ の上での絶対値上限，を入れたものである．$u:E'\to F$ があたえられたときには，u に対して $E'\times F'$ 上の双線形形式

$$\tilde{u}:(x', y')\mapsto\langle y', u(x')\rangle$$

を対応させることができる．これは明らかに連続である [u が連続線形ならば]．逆に，$\phi \in B(E', F')$ とすれば，$u_\phi : x' \mapsto (y' \mapsto \phi(x', y'))$ は E' から $F'' = F$ への連続線形写像である．そうして，$\phi = \tilde{u}_\phi$ となることは直ちにわかる．これらのことから，$B(E', F')$ は $L(E'; F)$ に標準的に同型となる．この同型は，明らかに，ノルムもこめて成りたつ．

かくして，自然な写像の列

$$E \hat{\otimes}_\pi F \to L^1(E'; F) \to E \hat{\otimes}_\varepsilon F \to L(E'; F) \simeq B(E', F')$$

を得る．一番目の空間には π-ノルム，二番目の空間にはトレース・ノルム，あとの二つの空間には作用素ノルムを入れて考えている．写像はすべて連続であり，最後のは (中への) 等距離写像である．これから述べることによれば，最初の写像は (上への) 等距離写像となる．そのために，これらの空間の双対を考察しよう．

一番目の空間の双対が何であるかは既知である[1]．すなわち，それは $B(E, F) \cong L(E; F')$ に等しい．(稠密な像をもつ) 写像 $E \hat{\otimes}_\pi F \to E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ を転置することによって，$E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ の双対から $B(E, F)$ への単射が得られる．その像は (一般に) $J(E, F)$ で示される．$J(E, F)$ の各元は $E \times F$ 上の**積分型形式** (integral form) と呼ばれる (次章の定義 49.1 参照；この定義は，間もなく見るように，Hilbert 空間の場合には，名称が正当ではない)[2]．いずれにしても，$J(E, F)$ の元は，E から F' への連続線形写像と同一視することができる．それらは，どのような線形写像であろうか？

この疑問に答える前に，$E \hat{\otimes}_\pi F$ と $L(E; F')$ の間の双対性の括弧式を思い出す必要がある．θ を $E \hat{\otimes}_\pi F$ の元とし，u を $L(E; F')$ の元とする．写像の拡張されたテンソル積

$$u \hat{\otimes}_\pi I : E \hat{\otimes}_\pi F \to F' \hat{\otimes}_\pi F, \qquad I : F \text{ の恒等写像}$$

---

1) 命題 43.4 の系参照．

2) integral form は直訳すれば '積分形式' であるが，自然な意味では積分で表わされない (適当な空間をえらぶならば，積分で表わすことができるのであるが)．そこで積分型と訳す．

を考えるならば，$(u \widehat{\otimes}_\pi I)(\theta)$ は $F' \widehat{\otimes}_\pi F$ の元となるから，そのトレースを考えることができる (608 頁参照)．このとき

$$\langle u,\ \theta\rangle = \mathrm{Tr}((u \widehat{\otimes}_\pi I)(\theta))$$

が成りたつ[1]．もし，θ の表現式として

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \otimes y_k$$

(ただし，$\sum_k |\lambda_k| < +\infty$；$\{x_k\}$, $\{y_k\}$ はそれぞれ E および F において 0 に収束する列) の形のものをとれば，

$$\langle u,\ \theta\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle u(x_k),\ y_k\rangle \tag{48.2}$$

を得る．これらのことを用いるならば，$E \widehat{\otimes}_\pi F$ と $L^1(E',\ F)$ をいつでも区別して考える必要はないことを示すことができる．トレース・ノルムは，π-ノルムを標準写像 $E \widehat{\otimes}_\pi F \to L^1(F' ;E)$ の核を法として考えた商だから，この写像が 1 対 1 であることを示せばよいのである．それは，次の結果から出る．

定理 48.4. E, F を Hilbert 空間とすれば，$E \widehat{\otimes}_\pi F$ から $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ への標準写像は 1 対 1 である．

証　明． このためには，問題の写像の転置が弱稠密な像をもつことを示せば十分である．もとの写像は明らかに稠密な像をもつから，その転置は 1 対 1 写像である．換言するならば，$J(E,\ F) \cong (E \widehat{\otimes}_\varepsilon F)'$ が $B(E,\ F) \cong (E \widehat{\otimes}_\pi F)'$ において弱稠密であることを示せば十分である．ここで，弱とは $B(E,\ F)$ と $E \widehat{\otimes}_\pi F$ の間の双対性の意味で考えねばならない．$B(E,\ F)$ は $L(E;\ F')$ と同一視して考える．写像 $v: E \to F$ のうちで，その像が有限次元のもの（もちろん，連続線形なもの）は，明らかに $J(E,\ F)$ に属することに注意しよう[2]．した

1) 命題 43.4 およびその系参照．そこにおける双対性の括弧式の定義によって，まず $\langle u,\ x\otimes y\rangle = \tilde{u}(x,\ y) = \langle u(x),\ y\rangle$, $(x,\ y) \in E\times F$ を得る；他方 $\mathrm{Tr}(y'\otimes y) = \langle y',\ y\rangle$ だから，$\langle u(x), y\rangle = \mathrm{Tr}(u(x)\otimes y) = \mathrm{Tr}((u\otimes I)(x\otimes y)) = \mathrm{Tr}((u \widehat{\otimes}_\pi I)(x\otimes y))$ を得る．ゆえに，$\theta = x\otimes y$ の形のときには，$\langle u,\ \theta\rangle = \mathrm{Tr}((u \widehat{\otimes}_\pi I)(\theta))$ が成り立つ．一般の $\theta \in E \widehat{\otimes}_\pi F$ については，線形性と連続性によって得られる．

2) 命題 43.6 の系参照．

がって，$\theta \in E\widehat{\otimes}_\pi F$ とするとき，任意の $u \in L(E\,;\,F')$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，上述のような v が存在して，$|\langle u-v,\,\theta\rangle| \leqq \varepsilon$ となることを示せばよい[1]. そこで，次の事実を証明されたものとして用いよう.

(48.3)　E の任意のコンパクト集合 K と，F' の 0 の任意の近傍 V に対して，有限次元の像をもつ連続線形写像 $v: E \to F$ が存在して，

$$(u-v)(K) \subseteq V$$

となる.

そこで，(48.3) と等式 (48.2) を合せて用いることにして；集合 K としては集合 $\{x_k\}_{k=0,1,\cdots} \bigcup \{0\}$ をとり，集合 V としては，点列 $S=\{y_k\}$ の極集合 S^0 のスカラー倍 ρS^0 をとる (ただし，$\rho = \varepsilon/(\sum_k |\lambda_k|)$. そうすれば，$|\langle u-v,\,\theta\rangle| \leqq \varepsilon$ を得る. ところで，性質 (48.3) は次の補題から容易に出る.

補題 48.3. H を Hilblert 空間とすれば，H の任意のコンパクト集合 C と，H における 0 の任意の近傍 V に対して，有限次元の像をもつ連続線形写像 $w: H \to H$ が存在して，すべての $x \in C$ について

$$x-w(x) \in V$$

が成り立つ.

補題を証明するまえに，補題を用いて定理 48.2 の証明を完成しておこう. 補題を，$H=F'$, $C=u(K)$ として適用する. ここで，K は E の任意のコンパクト集合とする. 補題における w をもちいて，$v = w \circ u$ とおけば，v の像は有限次元であり，$(I'-w)(C) \subseteq V$ (I' : F' の恒等写像) は $(u-v)(K) \subseteq V$ と同値である. ゆえに，(48.3) が証明された.

補題 48.3 の証明. V は原点を中心とする閉球であると仮定してよい. C は x_0+V の形の有限個の球で覆うことができる. そこで，M をこれらの球の中心で張られる H の (有限次元) 線形部分空間とすれば，$C \subseteq M+V$ が成りたつ. したがって，w を H から M の上への直交正射影写像とすれば，$x-w(x)$ のノ

1)　Hahn-Banach の定理による (上述のような v の全体は線形，したがって凸だから).

ルムは $[x \in C$ である限り$] \leqslant V$ の半径となる．なぜなら $\tilde{x} \in M$ が存在して $x - \tilde{x} \in V$ となるからである．ゆえに $x - w(x) \in V$.

さて，$u \in L(E; F') \cong B(E, F)$, $\theta \in L^1(E'; F) \cong E \widehat{\otimes}_\pi F$ とする．u の転置 ${}^t u$ は F から E' への連続線形写像だから，合成写像 $\theta \circ {}^t u$ は F をその自身の中に写す．これは，命題 47.1 によって，核型写像である．このとき，直ちにわかるように

$$\langle u, \theta \rangle = \mathrm{Tr}(\theta \circ {}^t u)$$

が成りたつ[1]．ここで，線形形式 $\theta \mapsto \langle u, \theta \rangle$ が $E \otimes F$ 上において，位相 ε に関して連続になるための必要十分条件は，u が核型になることであることを示そう．これは，次のように述べることができる．

定理 48.5. E と F を Hilbert 空間とするとき，$E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ の双対は，$L^1(E; F')$ に標準的に同形である．

この同形写像はノルムをこめて成りたつ：$E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ には作用素ノルム (ε-ノルムに等しい) を入れて考え，核型作用素 $E \to F'$ の空間にはトレース・ノルム (π-ノルムに等しい) を入れて考える．定理 48.5 は，J. Diximier と R. Schatten による．Hilbert 空間からその双対の上への標準的反線形等距離写像をもちいるならば，定理 48.5 は，次のようにさらに判然とする．

定理 48.5′. E と F を Hilbert 空間とするとき，コンパクト線形写像 $E \to F$ の全体がなす空間に作用素ノルムを入れたものの双対は，核型作用素 $E \to F$ の全体のなす空間にトレース・ノルムを入れたものに等しく；陪双対は，すべての連続線形写像 $E \to F$ のなす空間 $L_b(E; F)$ に等しい．

定理 48.5 の証明. すでに述べたように，もし $\theta \mapsto \langle u, \theta \rangle$ が $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ 上で連続ならば，u は核型になることを証明せねばならない．そこで

$${}^t u = UR \qquad (\text{写像の‘合成’の記号}\circ\text{は省略})$$

1) (48.2) から明らか，$E \widehat{\otimes}_\pi F$ の元 θ を作用素として見るときの解釈を考えればよい．

と書こう（R は u の絶対値であり，U は $R(F)$ から E' への等距離写像）．ここで，Hilbert 空間における線形作用素のスペクトル理論からの，次の結果を利用しよう．《R を（F からそれ自身への）正有界作用素であって，コンパクトでないとすれば，有界線形作用素 G が存在して，GR は無限次元閉部分空間の上への直交射影作用素 P となる》．そこで

$$\theta = vGU^{-1} \qquad (: E' \to F')$$

を考えて見る[1]．ただし，v は F からそれ自身への連続線形写像で，有限次元の像をもつものとする．そうすれば，

$$\langle u, \theta\rangle = \mathrm{Tr}(\theta {}^t u) = \mathrm{Tr}(vP)$$

となる．ここで，v は $L_b(F; F)$ の単位球に入っているものとすれば

$$\|\theta\| \leqslant \|v\|\|G\| \leqslant \|G\|$$

となるから，θ の（作用素としての）ノルムは有界にとどまる（ところで，ε-ノルムはちょうど作用素ノルムである）．他方，v として，F から $P(F)$ の n 次元部分空間の上への直交射影作用素をとれば，$vP = v$ であり，$\mathrm{Tr}(v) = n$ となる．$\dim P(F) = +\infty$ だから，$n \mapsto +\infty$ とすることができる．このようにして，θ は ε-ノルムに関して有界であるにもかかわらず，$|\langle u, \theta\rangle|$ は有界にとどまらない．これは矛盾である．これは R が，したがって，${}^t u$ がコンパクトでなければならないことを意味している．ところで，そのときには，

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$$

と書くことができる（(48.1) 参照）．ここで，P_k は（たがいに直交する）F の有限次元部分空間 V_k の上への直交射影作用素である．そこで，今度は $\theta = vU^{-1}$ とすれば，$\mathrm{Tr}(\theta {}^t u) = \mathrm{Tr}(vR)$ となる．$v = \sum_{k=1}^{N} P_k$ とすれば[2]

$$\mathrm{Tr}(vR) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \dim V_k$$

である．他方，$|\langle u, \theta\rangle| \leqslant$ 定数$\times\|\theta\|$（$\|\ \ \|$: 作用素ノルム）だから，

---

1) U^{-1} は ${}^t u$ の像の閉包上でしか定義されていないが，その直交補空間上では 0 として，E' 全体で定義する．

2) このとき $\|v\| = 1$ に注意．よって $\|\theta\| \leqslant \|U^{-1}\| = 1$.

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \dim V_k \leqslant \text{定数} \times \|\theta\|$$

を得る. ここで, $N \to +\infty$ とすることによって, $\mathrm{Tr}\, R$ は有限で, たかだか $E \otimes_\varepsilon F$ 上の線形形式 $\theta \mapsto \langle u, \theta \rangle$ のノルムに等しいことがわかる[1]. 定理48.2を用いれば, R が, したがって, u が核型となることが導かれる. そうして

$$\|u\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \sup_{\|\theta\| \leqslant 1} |\langle u, \theta \rangle|$$

が成り立つ. 逆に, u が核型ならば, ${}^t u$ も $\theta \circ {}^t u$ も核型であり

$$|\langle u, \theta \rangle| = |\mathrm{Tr}(\theta \circ {}^t u) \leqslant \|\theta \circ {}^t u\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \|\theta\| \; \|{}^t u\|_{\mathrm{Tr}}$$

が成りたつ (命題47.1; ここで θ は $L(E' ; F)$ の任意の元). したがって, これに命題47.5の系を適用すれば, 証明は終る 最後の評価式については, トレース形式は $F' \widehat{\otimes}_\pi F \cong L^1(F ; F)$ 上の, ノルム1の連続線形汎関数であることを思い出そう).

1) 前頁脚注参照.

49.

$E\otimes_\varepsilon F$ の双対. 積分型写像

$E\otimes_\varepsilon F$ は, $E_\sigma'\times F_\sigma'$ 上の連続双線形形式の空間 $B_\varepsilon(E_\sigma', F_\sigma')$ (と同一視できるもの) だったことを思い出そう. 位相は, それぞれ E', F' における各同等連続集合 A', B' の積集合 $A'\times B'$ 上の一様収束の位相である. 恒等写像

$$E\otimes_\pi F\to E\otimes_\varepsilon F$$

を転置することによって, $E\otimes_\varepsilon F$ の双対から $E\otimes_\pi F$ の双対, すなわち $E\otimes F$ 上の連続双線形写像の空間 $B(E, F)$ への (連続) 単射を得る (命題 43.4 の系参照).

定義 49.1. $E\otimes_\varepsilon F$ の双対から $B(E, F)$ の標準写像による像を $J(E, F)$ で表わし, その各元を $E\times F$ 上の**積分型形式** (integral form) とよぶ.

今後, $J(E, F)$ を $E\otimes_\varepsilon F$ の双対と同一視する. $E\otimes F=B(E_\sigma', F_\sigma')$ は, ベクトル空間として, $E_\sigma'\otimes_\pi F_\sigma'$ の双対と同一視できることに注意しょう. このとき, その ε-位相は, A', B' を同等連続集合としたときの $A'\otimes B'$ の形の各集合上での一様収束の位相である[1]. したがって, ε-位相に関する 0 の近傍基底としては, $(A'\times B')^0$ の形の極集合からなるものがとれる. 他方, $E'\otimes F'$ は明らかに $J(E, F)$ の線形部分空間と見なすことができる. したがって, $E\otimes_\varepsilon F$ の双対 $J(E, F)$ の同等連続部分集合は, 或る陪極 $(A'\otimes B')^{00}$ の部分集合となる. この事実に基礎をおいて積分型形式は**積分表示** (integral representation) できることを示す. これが '積分型' という名称の由来である. し

1) 命題 43.4 参照 ; そこにおける対応から, このことは明らか.

かし，証明に先立って，Radon 測度に関する若干の事実が必要となる.

K を一つの局所凸 Hausdorff TVS G のコンパクト部分集合して，$\mathcal{C}(K)$ を K 上の複素数値連続関数全体のなす Banach 空間とする. そのノルムは，最大値ノルム $f\mapsto\sup_{x\in K}|f(x)|$ である. $\mathcal{C}(K)$ の双対 $\mathcal{C}'(K)$ は，その定義によって，K 上の Radon 測度のなす空間である. K から $\mathcal{C}'(K)$ への自然な単射が存在する. それは，各 $x\in K$ に対して，点 x における Dirac 測度 δ_x を対応させるものである ($\langle\delta_x, f\rangle=f(x)$ であることを思い出そう). 写像 $x\mapsto\delta_x$ は，$\mathcal{C}'(K)$ に弱双対位相を入れたとき，明らかに連続であるが，それはまた1対1であるから，K からその像 $\delta(K)\subseteq\mathcal{C}'(K)$ の上への同相写像となる. この逆写像は，Dirac 測度 δ_x, $x\in K$ によって張られる $\mathcal{C}'(K)$ の線形部分空間から G への線形写像に，線形性によって拡張することができる[1]. この線形写像が，$\mathcal{C}'(K)$ からの誘導位相に関して連続であるとしよう[2]. ただし，$\mathcal{C}'(K)$ には弱双対位相が入っているとする. そうすれば，連続性によって，この逆写像は，Dirac 測度で張られる部分空間の閉包から G の完備化 $\widehat{G}$ への連続線形写像に拡張することができる. ところで，Dirac 測度の有限一次結合の全体は，Hahn–Banach の定理によって，$\mathcal{C}'(K)$ において弱稠密である. 実際，すべての Dirac 測度に直交する連続関数は，恒等的に0でなければならないからである. かくして，$\mathcal{C}'(K)$ (位相は弱双対位相) から $\widehat{G}$ への連続線形写像が得られた. さて，$\delta(K)$ の弱閉凸包 $\widehat{\delta(K)}$ を考えて見よう. これは，$\mathcal{C}'(K)$ の閉単位球の弱閉部分集合である. ところで，$\mathcal{C}(K)$ は樽型空間だから，$\mathcal{C}'(K)$ の閉単位球は弱コンパクトである. したがって，$\widehat{\delta(K)}$ はコンパクトとなる. したがって，その $\widehat{G}$ における像は，コンパクト凸集合となり，K を含む. ゆえに，それは $\widehat{G}$ における K の閉凸包 $\widehat{K}$ を含むが ($\widehat{K}$ はコンパクトである)，容易に検証できるように，実際は $\widehat{K}$ と一致する. 他方，$\widehat{\delta(K)}$ は全測度 $\leqslant 1$ となる K 上の正 Radon 測度からなる集合である. 実際には，$\widehat{\delta(K)}$ はそのようなすべて

---

1) これは，集合 $\delta(K)$ の一次独性による. 拡張は一意的.

2) たとえば，G の位相を弱位相 $\sigma(G, G')$ におきかえておけば，このことは満たされることが容易にわかる.

の Radon 測度のなす集合にちょうど一致する. なぜなら, $\mu \in \mathcal{C}'(K)$ が $\geqslant 0$ で $\mu(K) \leqslant 1$ とすれば, $f \in \mathcal{C}(K)$ のうちで $\delta(K)$ の極集合に属するものすべてについて $|\mu(f)| \leqslant 1$ となるからである. 実際, そのような関数は, すべての $x \in K$ において $|f(x)| \leqslant 1$ となることによる. このようにして, μ は $\delta(K)$ の陪極に属することになるが, μ は正であるから, 容易に検証できるように, $\delta(K)$ の弱閉凸包に属することとなる. いずれにしても[1], G における K の閉凸包 $\Gamma(K)$ の各元 x は, K 上の全測度 $\leqslant 1$ の正 Radon 測度 μ の像となる. そこで, x を G の双対 G' の任意の元とすれば

$$\langle x', x\rangle = \int_K \langle x', y\rangle \, d\mu(y) \tag{49.1}$$

が成りたつ. 実際, これは $x = \sum_{j=1}^{r} m_j x_j$, $x_j \in K$, $\sum_{j=1}^{r} m_j \leqslant 1$ の形のときには正しい (このときには, $\mu = \sum m_j \delta_{x_j}$ とすればよい. 一般の $\mu \in \widehat{\delta(K)}$ に対しては, 極限移行により正しい.

さて, 積分型形式に対する積分表示公式を述べて, 証明しよう. 双対空間における弱閉同等連続集合は弱コンパクト集合であったことを思い出そう.

命題 49.1. $E \times F$ 上の双線形形式 u が積分型であるための必要十分条件は, それぞれ E' および F' の同等連続弱閉部分集合 A', B' が存在し, コンパクト集合 $A' \times B'$ 上の全測度 $\leqslant 1$ となる正 Radon 測度 μ が存在して, すべての $x \in E$, $y \in F$ に対して

$$u(x, y) = \int_{A' \times B'} \langle x', x\rangle \langle y', y\rangle \, d\mu(x', y') \tag{49.2}$$

と書けることである.

証 明 (49.2) が積分型形式を定義することは明らかである. 実際, その右辺を $E \otimes F$ 上の線形形式と見なして, $\theta \in E \otimes F$ ($E' \times F'$ 上の双線形形式と見なす) を $|\theta(A', B')| \leqslant 1$ となるものとすれば, $|\langle u, \theta\rangle| \leqslant \int_{A' \times B'} d\mu \leqslant 1$ を得る.

---

1) 前頁脚注 2) 参照.

逆に，u を積分型形式とすれば，u は $A' \otimes B'$ の形の集合の陪極に属する．すなわち，$A' \otimes B'$ の弱閉凸平衡包に属するとしてよい．ここで，A', B' は同等連続集合であるが，これらの集合は弱閉であると仮定しても差支えない．そうすれば，これらは弱コンパクト集合である．$E_\sigma' \times F_\sigma'$ から $E' \otimes F'$ への標準的双線形写像は，$E' \otimes F'$ に $\sigma(J(E, F), E \otimes F)$ からの誘導位相を入れたときに連続であり，したがって，コンパクト集合 $A' \times B'$ から $A' \otimes B'$ の上への連続写像をあたえることに注意しよう．ゆえに，この位相に関して，$A' \otimes B'$ はコンパクトである．ここで，命題 49.1 の前に述べた考察と等式 (49.1) を用いるならば，$A' \otimes B'$ 上の全測度 $\leqslant 1$ の正 Radon 測度 μ' が存在して，すべての $\theta \in E \otimes F$ について

$$\langle u, \theta \rangle = \int_{A' \otimes B'} (x' \otimes y')(\theta) \, d\mu' (x' \otimes y')$$

が成りたつ．ところで，標準写像は $A' \times B'$ から $A' \otimes B'$ の上への連続写像だったから，$A' \times B'$ 上の全測度 $\leqslant 1$ の正 Radon 測度 μ が存在して，μ' は μ の像となる[1]．そこで，$\theta = x \otimes y$ とすれば，ちょうど (49.2) が得られる．

注意 49.1. E, F の位相が共に Mackey 位相 (459 頁参照) ならば，E', F' において弱コンパクト集合と弱閉同等連続集合とは——それらが凸平衡的ならば——一致する．このことは，とくに，E と F が樽型空間あるいは距離付け可能なとき，とくにノルム空間の場合に，成り立つ．

等式 (49.2) であたえられる積分型形式 u を考え，A', B' のそれぞれ E, F における極集合を U, V とする．U, V は 0 の閉凸平衡的近傍である．これらに対応するセミノルムを $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ とする ($\mathfrak{p}(x) = \inf_{x \in \rho U} \rho$, $\rho > 0$)．ノルム空間 $E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$, $F/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{q}$ にそれぞれ商ノルム $\mathfrak{p}/\mathrm{Ker}$, $\mathfrak{q}/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{q}$ を入れたものを，$E_\mathfrak{p}$, $E_\mathfrak{q}$ と書けば，E から $E_\mathfrak{p}$ の上への標準写像を転置することにより，$E_\mathfrak{p}'$ から E' への連続単射を得るが，その像は U の極 U^0 によって張られた部分空間 E'_{U^0} に等しい．$\mathfrak{p}$ の双対ノルムは，U^0 のゲージ $\mathfrak{p}_{U^0}$ にちょうど等しい；前と同様 (598 頁参照)，$E_\mathfrak{p}'$ と E'_{U^0} は同一視して考えるならば，$E_\mathfrak{p}'$ は E 上の線形形式のうち

1) このことに関しては，訳者あとがきの定理 B.2.7 参照．

で，セミノルム $\mathfrak{p}$ に関して連続なもののなす空間である．E'_{U^0} は $E_\mathfrak{p}$ の完備化 $\widehat{E}_\mathfrak{p}$ の双対に等しいことも明らかである．ところで，このとき，A' は $E_\mathfrak{p}'$ の同等連続集合となり，B' は $F_\mathfrak{q}'$ の同等連続集合となることに注意しよう．実際，これらの集合はそれぞれ Banach 空間 $E_\mathfrak{p}'$, $F_\mathfrak{q}'$ の閉単位球に含まれている．双線形形式 u にもどれば，(49.2) から，すべての $x\in E$, $y\in F$ に対して

$$|u(x, y)|\leqslant \mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}(y)$$

が成りたつ．したがって，u は $E_\mathfrak{p}\times F_\mathfrak{q}$ 上の連続双線形形式を定義し，連続性によって，$\widehat{E}_\mathfrak{p}\times\widehat{E}_\mathfrak{q}$ 上の双線形形式を定義する．等式 (49.2) にもどって，A', B' をそれぞれ $E_\mathfrak{p}'$, $F_\mathfrak{q}'$ の同等連続集合と見なすならば，$\tilde{u}$ は $\widehat{E}_\mathfrak{p}\times\widehat{F}_\mathfrak{q}$ 上の積分型形式であることがわかる．$E\times F$ 上の積分型形式にもどすためには

$$u(x, y)=\tilde{u}(\phi_\mathfrak{p}(x), \phi_\mathfrak{q}(y))$$

とおけばよい．ここで，$\phi_\mathfrak{p}$ (あるいは $\phi_\mathfrak{q}$) は E から $\widehat{E}_\mathfrak{p}$ への (あるいは F から $\widehat{F}_\mathfrak{q}$ への) 標準写像である．任意の積分型形式を Banach 空間の積の上の積分型形式に帰着させる上述の仕方は，今後も相当に利用される．等式 (49.2) を考慮して，次の定義を導入する．

定義 49.2. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間とするとき，連続線形写像 $u: E\to F$ が**積分型写像** (integral map) であるとは，それに随伴する $E\times F'$ 上の双線形形式

$$(x, y')\mapsto\langle y', u(x)\rangle$$

が積分型になることを云う[1]．

F の強双対を F' とするならば，前に述べたことにより，それぞれ E, F' 上の連続セミノルム $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}'$ が存在して，$\langle y', u(x)\rangle$ は $\widehat{E}_\mathfrak{p}\times\widehat{F}'_{\mathfrak{q}'}$ 上の積分型形式と考えられることがわかる．U, V' をそれぞれ $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}'$ の閉単位球とするならば，強双対位相の定義によって，V' の F における極集合 V'^0 は，F の閉凸平衡的有界集合である．不等式

1) F' には強双対位相を入れて考えている．

$$|\langle y', u(x)\rangle| \leqslant \mathfrak{p}(x)\mathfrak{q}'(y')$$

が成り立つから (既述のことから, 適当に $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}'$ をえらべばよい), u は U を V'^0 に写す. かくして, u はノルム空間 $E_{\mathfrak{p}}$ からノルム空間 $F_{V'^0}$ への連続写像を定義することがわかる (後者の空間の定義については, 460 頁参照). $F_{V'^0}$ の双対は, Banach 空間として, $\widehat{F}_{\mathfrak{q}'}{}'$ と同一視できるから, u は次の写像列に分解できる

$$E \xrightarrow{i} E_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\tilde{u}} F_{V'^0} \xrightarrow{j} F$$

ここで, i, j は自然な写像であり, $\tilde{u}$ は積分型である. すなわち, ここでもまた, ノルム空間の場合に帰着された.

命題 49.2. E, F, G, H を四つの局所凸 Hausdorff 空間として, $u: E\to F$ を積分型写像, $f: G\to E$ と $g: F\to H$ を連続線形写像とすれば, 合成写像 $g\circ u\circ f$ は積分型となる.

証明 次のことを示せば十分である. Φ を $E\times F'$ 上の積分型形式とするとき, $G\times H'$ 上の形式 $(\xi, \eta')\mapsto \Phi(f(\xi), {}^t g(\eta'))$ は積分型となる. ところで, これは, $f\otimes {}^t g$ が $G\otimes_{\varepsilon}H'$ から $E\otimes_{\varepsilon}F'$ への連続線形写像であることから直ちに出る.

命題 49.3. 連続線形写像 $u: E\to F$ が積分型ならば, その転置 ${}^t u: F'\to E'$ も積分型となる.

証明 積分型写像 u は

$$E \xrightarrow{i} E_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\tilde{u}} F_B \xrightarrow{j} F \tag{49.3}$$

と分解できる. ここで, $\mathfrak{p}$ は E 上の連続セミノルム, B は F の閉凸平衡的有界集合であり, i と j は自然な写像, $\tilde{u}$ は積分型である (これは既述のところ参照). 写像列 (49.3) を転置することによって, u の転置の分解が得られる. したがって, $\tilde{u}$ の転置 ${}^t\tilde{u}: \widehat{F}_{\mathfrak{q}}{}' \to E_{\mathfrak{p}}{}'$ ($\mathfrak{q}'$ は B の極 B^0 のゲージ) が積分型にな

ることを示せば，十分である．換言すれば，E および F をノルム空間であると仮定してよい．ところで，A', B'' をそれぞれ E', F'' における閉単位球とすれば，$A'\times B''$ 上の全測度 $\leqslant 1$ となる Radon 測度 μ が存在して，すべて $x\in E$, $y'\in F$ に対して

$$\langle {}^t u(y'), x\rangle = \langle y', u(x)\rangle = \int_{A'\times B''} \langle x', x\rangle\langle y'', y'\rangle\, d\mu(x', y'') \tag{49.4}$$

と書くことができる．この式において，右辺も左辺も（連続性によって）x の動く範囲を E から E'' へ拡張することができる[1]．したがって，形式 $(y', x'')\mapsto \langle {}^t u(y'), x''\rangle$ は積分型である．

命題 49.4. 標準単射 $E\to E''$ と $F'\to F'''$ が共に（中への）同形写像とする（たとえば，E, F' が共に樽型または距離付け可能ならばよい）．このとき，連続線形写像 $u: E\to F$ の転置が積分型であれば，u が積分型となる．

証　明　命題 49.3 によって，u の**陪転置** (bitranspose) ${}^{tt}u: E''\to F''$ は積分型である．$i: E\to E''$ を自然単射とすれば，u は E から F'' への写像とみるとき ${}^{tt}u\circ i$ に等しい．ところで，仮定によって i は連続だから，$u: E\to F''$ は積分型となる．かくして，(49.2) の形，あるいはむしろ (49.4) の形の積分表示

$$\langle y''', u(x)\rangle = \int_{A'\times B''''} \langle x', x\rangle\langle y'''', y'''\rangle\, d\mu(x', y'''')$$

を得る．この両辺を $E\times F'$ に制限してみる；すなわち，$y'''\in F'''$ を $y'\in F'$ でおきかえる．そうして，自然単射 $F'\to F'''$ が中への同形写像であるという仮定を考慮すれば，容易に結果を得る．なぜなら，積分表示

$$\langle y', u(x)\rangle = \int_{A'\times B''} \langle x', x\rangle\langle y'', y\rangle\, d\tilde{\mu}(x', y'')$$

を得るからである．ここで，B'' は同形写像 $F'\to F'''$ の転置として得られる標準写像 $F''''\to F''$ による B'''' の像であり，$\tilde{\mu}$ はこの写像による μ の像

1) 位相は $\sigma(E'', E')$ を考えればよい（$y'\in E'$ は固定して考える）．

である. B'' は明らかに F'' の弱閉同等連続部分集合である.

系. E, F をノルム空間とすれば, $u: E \to F$ が積分型であるための必要十分条件は, ${}^t u: F' \to E'$ が積分型になることである.

命題 49.5. 核型写像 $u: E \to F$ は, 積分型である.

証 明 たとえば, u の表現式 (47.2) (命題 47.2) を利用してみよう. そうすれば, u に随伴する $E \times F'$ の双線形形式は

$$\tilde{u}(x, y') = \sum_k \lambda_k \langle x_k', x \rangle \langle y', y_k \rangle$$

となる. ここで, $\{x_k'\}$ は E' の同等連続点列であり, y_k はすべて F の一つの有界集合 B に含まれていたことを思い出そう. 強双対位相の定義により, B の極 B^0 は E' における 0 の近傍である. したがって, E'' における B^0 の極集合は, E'' の一つの同等連続部分集合 B'' であり, 明らかに弱閉である. そこで, $\theta \in E \otimes F'$ の $S' \times B''$ においてとる値が有界で, 絶対値において 1 以下とするならば[1], $|\langle \tilde{u}, \theta \rangle| \leqslant \sum_k |\lambda_k| < +\infty$ を得る. これから直ちに, u が積分型であることが出る.

例 49.1. X をコンパクトな位相空間とし, dx を X 上の正 Radon 測度で, 全測度 $\leqslant 1$ とする. このとき, $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X)$ ($\mathcal{C}(X)$: X 上の複素連続関数全体のなす空間, ノルムは $f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$) 上の双線形形式

$$(f, g) \mapsto \int_X f(x) g(x) dx \tag{49.5}$$

は積分型である. それは, この表現式はまた

$$(f, g) \mapsto \int \langle \delta_x, f \rangle \langle \delta_y, g \rangle d\mu(\delta_x, \delta_y)$$

と書けるからである. ここで, δ_x は点 x における Dirac 測度であり, μ は X から $\mathcal{C}'(X) \times \mathcal{C}'(X)$ の対角線の弱コンパクト部分集合の上への写像 $x \mapsto (\delta_x, \delta_x)$ による dx の像となる Radon 測度である. ただし, $\mathcal{C}'(X)$ は X 上の Radon

1) すなわち, $\theta \in (S' \otimes B'')^0$ [これは $E \otimes_\varepsilon F'$ における 0 の近傍].

測度のなす Banach 空間であって，$\mathcal{C}(X)$ の双対である．形式 (49.5) に対応する $\mathcal{C}(X)$ から $\mathcal{C}'(X)$ への写像が $g \mapsto g(x)dx$ であることは，容易に検証できる[1]．

注意 49.2. 例 49.1 から，核型でない積分型写像の存在が示される．実際，$\mathcal{C}'(X)$ から $\mathcal{C}'(X)$ への上述の写像 $g \mapsto g(x)dx$ は積分型であるが，それは一般には核型ではない．なぜなら，もし核型とするならば，それはコンパクト写像となる筈である．ところで，たとえば．X として実直線上の閉区間 $[0, 1]$ をとり，dx として Lebesgue 測度 (をこの区間への制限したもの) を考えるならば，$\mathcal{C}(X)$ の単位球の写像 $g \mapsto g\,dx$ による像は，$\mathcal{C}'(X)$ の相対コンパクト集合にはならない[2]．

しかしながら，定理 48.3 の結果として，Hilbert 空間から Hilbert 空間への積分型写像は．すべて核型となる．

命題 49.6. E, F を二つの Hilbert 空間とし，$u : E \to F$ を積分型写像とすれば，u は核型である．

これは，定理 48.5 をもう一度述べたにすぎない．

さて，任意の積分型写像に対する有用な分解を得るために，例 49.1 を利用しよう．E, F を二つの局所凸 Hausdorff TVS とし，$u : E \to F$ を積分型写像とする．そうして，その表現

$$\langle y', u(x)\rangle = \int_{A' \times B''} \langle x', x\rangle \langle y'', y'\rangle \, d\mu(x', y'')$$

を考える．ここで，A' と B'' とは，それぞれ E と E' の間および F' と F'' の間の双対性に関して，弱閉同等連続集合だったことを思い出そう．そこで，コ

---

1) これは $g(x)\,dx$ の定義に他ならない．すなわち，

$$\langle g(x)\,dx, f\rangle = \int f(x)g(x)\,dx.$$

2) たとえば，$\mathcal{C}([0, 1])$ の単位球に含まれる関数列 $\{e^{i2\pi nx}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は，そのどんな部分列も $L^1([0, 1])$ において Cauchy 列とならない ($g\,dx$ の形の元の $\mathcal{C}'([0, 1])$ におけるノルムは，g の L^1-ノルムに等しい)．それは，$\mathcal{C}([0, 1])$ の単位球に属する元に対しては，L^1-収束から L^2-収束が出るからである．

ンパクト位相空間 X としては積集合 $A'\times B''$ をとり，二つの写像 $S: E\to \mathscr{C}(X)$ と $T: F'\to \mathscr{C}(X)$ を次のように定義する．各 $x\in E$ と各 $y'\in F'$ に対して

$$S(x): (x', y'')\mapsto \langle x', x\rangle$$
$$T(y'): (x', y'')\mapsto \langle y'', y'\rangle$$

とする．そうして，$\tilde{u}$ を $\mathscr{C}(X)$ から $\mathscr{C}'(X)$ への写像 $f\mapsto f(x', y'')d\mu(x', y'')$ とすれば，直ちにわかるように，u は写像列

$$E\xrightarrow{S}\mathscr{C}(X)\xrightarrow{\tilde{u}}\mathscr{C}'(X)\xrightarrow{{}^tT}F'' \tag{49.6}$$

の合成となる（u は F'' に値をもつと見なす）[1]．中央の矢印 $\tilde{u}$ は，例 49.1 において見たように，積分型写像である．u の分解 (49.6) から，次の重要な結果が導かれる．

命題 46.7. $u: E\to F$ を積分型写像とする．もし，局所凸 Hausdorff 空間 F が完備ならば，Hilbert 空間 H と二つの連続線形写像 $\alpha: E\to H$，$\beta: H\to F$ が存在して，$u=\beta\circ\alpha$ と書ける．

証 明 (49.6) において，$\tilde{u}$ は

$$\mathscr{C}(X)\to L^2(X, d\mu)\to \mathscr{C}'(X)$$

と分解できることに注意しよう．ここで，最初の矢印は連続関数の空間から自乗可積分関数の同値類の空間への自然写像であり，二番目の矢印は単射 $L^2(X, d\mu)\ni f\mapsto f\,d\mu\in \mathscr{C}'(X)$ である．この分解と (49.6) を組合せることによって，$u: E\to F''$ の次の分解が得られる．

$$E\xrightarrow{\sigma}H_0\xrightarrow{\tau}F''$$

ここで，H_0 は Hilbert 空間である．そこで，σ による E の像で張られる H_0 の部分空間を H_1 とすれば，$u(E)\subseteq F$ であることから，$\tau(H_1)\subseteq F$ を得る．H_1 には H_0 から導かれる準 Hilbert 空間の構造を入れておく．こうして，u

---

1) 容易にわかるように，${}^tT: \mathscr{C}'(X)\to F''$ は，各 $\nu\in\mathscr{C}'(X)$ に対して F' の線形形式 $y'\mapsto \int_{A'\times B''}\langle y'', y'\rangle\, d\nu(x', y'')$ を対応させる写像である．

の分解

$$E \xrightarrow{\sigma_1} H_1 \xrightarrow{\tau_1} F$$

を得るが，F は完備だから，τ_1 は H_1 の完備化 H にまで連続性によって拡張することができる．この拡張を β とする．H は Hilbert 空間である．写像 σ_1 を E から H への写像と見たものを α とする．そうすれば，命題に述べた分解が得られる．(証終)．

注意 49.3. 写像 $u: E \to F$ が $E \xrightarrow{\alpha} H \xrightarrow{\beta} F$ と分解できて，α, β は連続，H は Hilbert 空間としても，u が積分型でないものは存在する．自明な例としては，無限次元 Hilbert 空間の恒等写像 I がある．もし I が積分型になったとすれば，それは核型となり (命題 49.6)，したがってコンパクトになってしまうからである．

命題 49.6 と命題 49.7 からの簡単で重要な結果として，次のものがある．

命題 49.8. A, B, C, D を四つの局所凸 Hausdorff 空間とし，B と D は完備とする．このとき，三つの積分型写像

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D \tag{49.7}$$

の合成写像は，核型写像となる．

証明 命題 49.7 を適用すれば，写像列 (49.7) は，次のように分解できる．

$$A \xrightarrow{u_1} H_1 \xrightarrow{u_2} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w_1} H_2 \xrightarrow{w_2} D$$

ここで，H_j は Hilbert 空間であり，u_j, w_j は連続線形写像である ($j=1, 2$)．v は積分型だから，合成写像 $w_1 \circ v \circ u_2$ は積分型であり (命題 49.2)，したがって核型となる (命題 49.6)．したがって，全部の合成は核型となるが (命題 47.1)，それは $w \circ u \circ v$ に等しい．

命題 49.8 は，後に間もなく利用される．ここでは，その簡単は応用として，次のことを指摘しておく．E を無限次元 Fréchet 空間として，$u: E \to E$ を上への連続線形写像とすれば．u は積分型ではあり得ない．この事実の証明は，読者の演習問題としておく．

50.

核　型　空　間

45章，46章，47章において，位相テンソル積 $E \otimes_\varepsilon F$ および $E \otimes_\pi F$ の完備化が，既知の‘関数（または汎関数）’空間に対して，どのようにして新しい表現をあたえるかということのいくつかの例を見て来た．このような表現の有用性については，幾多の理由が存在する．一つの重要な理由としては，これらの表現によって，或る種の写像の拡張が，写像のテンソル積の $u \hat{\otimes}_\varepsilon v$ または $u \hat{\otimes}_\pi v$ の型の拡張であることを示すことによって，自動的に行なわれることである．また，これらの表現によって，考察している空間の或る種の重要な性質が判然として来ることもある．それらのなかには，これらの表現なしには，見落されたり，理解されずに残ったりするものもあり得る．後者の驚くべき例として，L. Schwartz の**核定理** (Kernel theorem) がある．その言うところは，本質的には，変数 x のテスト関数の空間 $(\mathcal{C}_c^\infty)_x$ からもう一つの変数 y の超関数の空間 $\mathcal{D}_y'$ への任意の連続線形写像は，二変数 x, y の（一意的にきまる）超関数 $K_{x,y}$ を用いて，公式

$$\phi \mapsto \langle K_{x,y}, \phi(x) \rangle$$

によってあたえられることである．この事情の特殊性を理解するためには，もっと‘古典的’な場合，たとえば L^2 理論における場合と比較するとよい．L_x^2 から L_y^2 への任意の有界作用が核 $K(x, y) \in L_{x,y}^2$ によって表現できるということ，すなわち

$$f \mapsto \int K(x, y) f(y)\, dy$$

と書けるということは，明白に誤りである．恒等写像自体が，このようには書けない！ 実際，恒等写像を定義する核（超関数）が Dirac 核 $\delta(x-y)$ であることを知っているが——これは関数ではない．

それでは，$\mathcal{D}'$ への連続線形作用素と L^2 上での作用素の間に，このような著しい差のある理由は何であろうか？ この疑問が，A. Grothendieck による完備テンソル積と核型空間の理論の原点である．この疑問に対する解答は，粗らく言うならば，空間 $\mathcal{D}'$（および $\mathcal{E}^\infty$, $\mathcal{E}_c^\infty$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}$ 等）は核型であるが，無限次元 Banach 空間は核型になり得ないということである．核型空間 E とは，局所凸 Hausdorff 空間であって，任意の空間 F に対して，$E \hat{\otimes}_\pi F = E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ が成りたつものである（ここで，記号 $=$ は，標準写像の代りであって，E が核型ならば，上への写像である）．この定義から直ちに明らかなことは，核型空間は，二つの写像のテンソル積 $u \otimes v$ の拡張に関して，良い性質をもつことである．なぜなら，ε-位相は（中への）同形写像を扱う際には良いし；他方，π-位相は上への準同形写像を扱うときに良い性質をもっているからである．核定理に話をもどすならば，$\mathcal{D}'_{x,y}$ が $\mathcal{D}_x' \otimes \mathcal{D}_y'$ 上にその ε-位相（または π-位相）を誘導することは直ちにわかる．したがって

$$\mathcal{D}'_{x,y} = \mathcal{D}_x' \hat{\otimes} \mathcal{D}_y'$$

を得る．ここで，記号 $\hat{\otimes}$ の添字 π あるいは ε を省略して書いた．また，容易にわかるように

$$\mathcal{D}_x' \hat{\otimes} \mathcal{D}_y' \cong L_\varepsilon((\mathcal{E}_c^\infty)_x ; \mathcal{D}_y')$$

が成りたつ．ただし，$(\mathcal{E}_c^\infty)_x$ の位相は τ-位相とする．ところで，$\mathcal{E}_c^\infty$ は Montel 空間だから，その τ-位相は始位相に一致するし，その同等連続部分集合（$\mathcal{E}_c^\infty$ を $\mathcal{D}'$ の双対と見なしたときのもの）は有界集合（= 相対コンパクト集合）と一致する．このようにして，結局

$$\mathcal{D}'_{x,y} \cong L_b((\mathcal{E}_c^\infty)_x ; \mathcal{D}_y')$$

を得る[1]．

---

1) きちんとした証明は，次章の定理 51.7 にある．

さて，核型空間を定義して，その基本的性質を述べよう．

Eを局所凸 Hausdorff 空間とし，$\mathfrak{p}$をその上の一つの連続セミノルムとする．このとき，$\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$はノルム空間 $E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ の完備化であったことを思い出そう ($E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ のノルムは，セミノルム $\mathfrak{p}$ の $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ を法とする商ノルムである)．したがって，$\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ は Banach 空間である．

定義 50.1. 局所凸 Hausdorff 空間が**核型空間** (nuclear space) であるとは，E 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{p}$ に対して，E 上のもう一つの連続セミノルム $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ が存在して，標準写像 $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ が核型になるときに言う．

標準的写像 $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ が何であるべきかは，容易にわかる．$\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ だから，$\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ker}\,\mathfrak{q}$ となり，したがって，$E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{q}$ から $E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ の上への標準的写像が存在する．さらに，この写像は，前者にノルム $\mathfrak{q}/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{q}$ を入れ，後者にノルム $\mathfrak{p}/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ を入れて考えたとき，連続である．[これを連続性によって $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ に拡張したものが，定義 50.1 における標準写像である.]

$\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ の双対 $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}'$ は，E に唯一つのセミノルム $\mathfrak{p}$ によって定義される位相を入れたときに連続になるような，E 上の汎関数 x' の全体からなる E' の部分空間と同一視することができることを思い出そう．$E_{\mathfrak{p}}'$ には，双対 Banach 空間の構造を入れて考える．この構造は，$\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ を用いることなしに定義できることを思い出そう．実際，$E_{\mathfrak{p}}'$ は $\mathfrak{p}$ の閉単位球 $U_{\mathfrak{p}}$ の極集合 $U_{\mathfrak{p}}^0$ によって張られる E' の部分空間であり，そのノルムは弱コンパクト凸平衡的集合 $U_{\mathfrak{p}}^0$ に付随するノルムである (598 頁および 629 頁参照)．

核型空間の定義は，次の定理によって正当化される．

定理 50.1. 局所凸 Hausdorff TVS E に関する次の諸性質は，同値である．

(a) E は核型である．

(b) E 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{p}$ に対して，E 上のもう一つの連続セミノルム $\mathfrak{q}$ が存在して，$E_{\mathfrak{p}}'$ から $E_{\mathfrak{q}}'$ への標準的単射は核型となる．

(c)　E から Banach 空間への連続線形写像は，すべて核型となる．

(d)　Banach 空間から E' への連続線形写像のうちで，単位球を同等連続部分集合に写すものは，すべて核型である．

(e)　任意の Banach 空間 F に対して，$E \widehat{\otimes}_\pi F$ から $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ への標準写像は，上への同形写像となる．

(f)　任意の局所凸 Hausdorff 空間 F に対して，$E \widehat{\otimes}_\pi F$ から $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ への標準写像は，上への同形写像である．

証　明． (a) ⇒ (b) は，定義 50.1 と核型写像の転置は核型になる事実から明らか．

(b) ⇒ (a) を示そう．標準単射 $j : E_\mathfrak{p}' \to E_\mathfrak{q}'$ は，標準写像 $i : \widehat{E}_\mathfrak{q} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$ の転置である．したがって，命題 49.4 の系により，i は積分型であることがわかる．ゆえに，E 上のもう二つの連続セミノルム $\mathfrak{s} \geqslant \mathfrak{r} \geqslant \mathfrak{q}$ を，標準写像

$$i' : \widehat{E}_\mathfrak{s} \to \widehat{E}_\mathfrak{r}, \qquad i'' : \widehat{E}_\mathfrak{r} \to \widehat{E}_\mathfrak{q}$$

が積分型となるようにえらぶことができる．そうすれば，標準写像 $\widehat{E}_\mathfrak{s} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$ をあたえる合成写像 $i'' \circ i' \circ i$ は，命題 49.8 により，核型となる．

F を Banach 空間として，$u : E \to F$ を連続線形写像としよう．F の閉単位球の u による逆像は，E の 0 の閉凸平衡的近傍 U となる．U のゲージを $\mathfrak{p}$ とする．E が核型とすれば，$\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ が存在して，$\widehat{E}_\mathfrak{q} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$ は核型写像となる．ところで，u は次のように分解できる．

$$E \xrightarrow{i} \widehat{E}_\mathfrak{p} \xrightarrow{j} \widehat{E}_\mathfrak{q} \xrightarrow{\tilde{u}} F$$

ここで，i と j は標準写像であり，$\tilde{u}$ は u によって定義される写像 $E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p} \to F$($E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ のノルムは $\mathfrak{p}/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$) の連続性による拡張である．$j$ は核型だから，u も核型となる (命題 47.1)．これで，(a) ⇒ (c) が示された．(c) ⇒ (a) を見るために，E 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{p}$ をとり，$F = \widehat{E}_\mathfrak{p}$，$u$ を E から $\widehat{E}_\mathfrak{p}$ への標準写像として，(c) を適用する．定義 47.3 によれば，u が核型であるということは，E 上の連続セミノルム $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ が存在して，標準写像 $\widehat{E}_\mathfrak{q} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$ が核型になるというのと同値である．これは，(c) ⇒ (a) を示している．

(b) と (d) の同値性は，(a)$\Leftrightarrow$(c) の同値性と殆ど同じ仕方で示される．したがって，この部分の証明は，読者に委せる．そうして，(e) と (f) が他の性質と同値であることの証明に専念することにしよう．まず，(e)$\Leftrightarrow$(f) の証明から始めよう．

(f)$\Rightarrow$(e) は自明である．ところで，(f)(あるいは (e)) の意味するところは，すべての局所凸 Hausdorff 空間 (あるいは Banach 空間) に対して，

$$E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F \tag{50.1}$$

が成り立つことであるが，等式には位相もこめて考える．等式 (50.1) を証明するために，補題 43.1 (演習問題 43.3) を応用することにして，$E \otimes_\pi F$ の双対 $B(E, F)$ の同等連続部分集合は $E \otimes_\varepsilon F$ の双対 $J(E, F)$ の同等連続部分集合であることを示そう．$B(E, F)$ は $E \times F$ 上のすべての連続双線形形式のなす空間であり，$J(E, F)$ は $E \times F$ 上の積分型形式のなす空間であることを想起しよう (49 章参照)．$B(E, F)$ の任意の同等連続部分集合 Φ をとれば，これに対して，それぞれ E, F 上の連続セミノルム $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ が存在して，Φ は $B(E_\mathfrak{p}, F_\mathfrak{q})$ の同等連続部分集合となる ($E_\mathfrak{p}$ は E に唯一つのセミノルム $\mathfrak{p}$ を入れたものであり，$F_\mathfrak{q}$ も同様である)．ところで，商空間 $E_\mathfrak{p} \to E_\mathfrak{p}/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$, $F_\mathfrak{q} \to F_\mathfrak{q}/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{q}$ へ移行し，さらにそれらの完備化をとることによって，$B(E_\mathfrak{p}, \widehat{F}_\mathfrak{q})$ の同等連続部分集合 Φ_1 および $B(\widehat{E}_\mathfrak{p}, \widehat{F}_\mathfrak{q})$ の同等連続部分集合 Φ_2 が，それぞれ Φ から (標準的に) 定義される．もちろん，Φ_1 は $B(E, \widehat{F}_\mathfrak{q})$ の同等連続部分集合とも見なすことができる．他方，$J(E, \widehat{F}_\mathfrak{q})$ の同等連続部分集合は，$J(E, F_\mathfrak{q})$ の同等連続部分集合と同一視できるし[1]，後者はまた $J(E, F)$ の同等連続部分集合である (これは，$E \otimes_\varepsilon F$ から $E \otimes F_\mathfrak{q}$ への恒等写像が連続であるということにすぎない!)．そこで，(e) が証明できたと仮定して見るならば，Φ_1 のような集合はすべて $J(E, \widehat{F}_\mathfrak{q})$ の同等連続部分集合となり，したがって，$J(E, F)$ の同等連続部分集合となる．これで，(e) と (f) の同値が証明された．

---

1) $i : E \to E$ を恒等写像，$\varphi : F_\mathfrak{q} \to \widehat{F}_\mathfrak{q}$ を標準写像とすれば，$i \otimes \varphi : E \otimes_\varepsilon F_\mathfrak{q} \to E \otimes_\varepsilon \widehat{F}_\mathfrak{q}$ は連続線形かつ稠密な像をもつから，その転置 : $J(E, \widehat{F}_\mathfrak{q}) \to J(E, F_\mathfrak{q})$ は同等連続集合を同等連続集合に写す単射である．

さて，今度は，E を核型空間，F を Banach 空間として，等式 (50.1) を証明しよう．Φ, $\mathfrak{p}$ は上と同様とする ($\mathfrak{q}$ は，今度は，F の [唯一つの] ノルム)．$\mathfrak{p}_0$ を E 上の連続ノルムであって，$\mathfrak{p}_0 \geqslant \mathfrak{p}$ とし，標準写像 $E_{\mathfrak{p}}' \to E_{\mathfrak{p}_0}'$ が核型とする ((b) によって，このような $\mathfrak{p}_0$ は存在する)．いま，$B \in B(E, F)$ に対して

$$u_B : y \mapsto (x \mapsto B(x, y))$$

とおく[1]．B が Φ の中を動くとき，u_B は $L(F; E_{\mathfrak{p}}')$ の同等連続部分集合と見なすことができる[2]．したがって，各 u_B, $B \in \Phi$ に標準単射 $E_{\mathfrak{p}}' \to E_{\mathfrak{p}_0}'$ を合成することにより，$L^1(F; F_{\mathfrak{p}_0}')$ (トレース・ノルムを入れた) の有界集合を得る[3]．このことから直ちに (命題 49.5 とその証明参照)[4]，u_B に対応する $F \times (F_{\mathfrak{p}_0}')'$ 上の双線形写像は，$J(F, (E_{\mathfrak{p}_0}')')$ の同等連続部分集合をなす．それを Φ'' としよう．ところで，$\widehat{F}_{\mathfrak{p}_0}$ からその陪双対 $(E_{\mathfrak{p}_0}')'$ への自然写像は中への同形写像であり，したがって，Φ'' は $\widehat{E}_{\mathfrak{p}_0}$ へ制限することにより $J(\widehat{E}_{\mathfrak{p}_0}, F)$ の同等連続部分集合 Φ_0 を定める．そこで，$i_0 : E \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}_0}$ を標準写像として，各 $B_0 \in \Phi_0$ に対して $B(x, y) = B_0(i_0(x), y), x \in E, y \in F$ とおけば，B_0 が Φ_0 の中を動くとき，B は Φ の中をわたることは，直ちに検証できる．他方，Φ_0 の同等連続性と i_0 の連続性によって，この B が $J(E, F)$ の同等連続集合の中を動くことがわかる．かくして，E が核型ならば，(50.1) の成り立つことがわかる．

逆に，等式 (50.1) がすべての Banach 空間 F について成立すると仮定して，E が核型空間になることを導こう．そこで，$\mathfrak{p}$ を E 上の任意の連続セミノルムとして，$u : E \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ を標準写像とする．u に随伴する双線形形式が $E \times E_{\mathfrak{p}}'$ 上で連続になることは自明である．ところで，仮定により $B(E, E_{\mathfrak{p}}') = J(E, E_{\mathfrak{p}}')$ だから，それは積分型形式となる．換言すれば，写像 u は積分型となる．ここで，積分型写像の分解 (631 頁参照) を用いれば，E 上の連続セミノルム

---

1) すなわち，$B(x, y) = \langle u_B(y), x \rangle$．

2) F のノルムを $q = \|\ \|$ とすれば，Φ の定義から，定数 $M \geqslant 0$ が存在して，$B \in \Phi$ ならば，$\mathfrak{p}(x) \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1$ のとき，$|B(x, y)| \leqslant M$ となる．これは，線形形式 $x \mapsto B(x, y)$ を B_y で表わすとき，$\|y\| \leqslant 1$ ならば $\|B_y\| \leqslant M$ (ノルムは $E_{\mathfrak{p}}'$ における双対ノルム) となることを意味する．

3) 命題 47.1 の不等式参照．

4) さらに，命題 47.2 の後段参照．

$\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p}$ が存在して，u は

$$E \xrightarrow{v} \widehat{E}_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{\tilde{u}} \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$$

と分解する．ここで，v は標準写像であり，$\tilde{u}$（これも標準写像）は積分型である．このことから，(b) ⇒ (a) の証明のときと同じ議論を用いて，E が核型になることが容易に結論される．

注意 50.1. 定理 50.1 の証明を眺めて見て，直ちにわかることは，性質 (a)，すなわち E が核型であるということは，性質 (b), (c), (d) の各々において，核型というのを積分型で置き換えたものと同値になることが証明されていることである．そうして，E が核型であるためには，E 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{p}$ に対して，E 上の連続セミノルム $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p}$ が存在して，標準写像 $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ が積分型になることが必要十分である．

さて，核型空間の基本的諸性質は，定義 50.1 から直接導くか，定理 50.1 を用いるかのどちらかによって，いまや容易に導き出すことができる．まず，いわゆる**安定性** (stability)[1] から始めよう．

命題 50.1.

(50.2)　局所凸 Hausdorff TVS E が核型であるためには，その完備化 $\widehat{E}$ が核型であることが必要十分である．

(50.3)　核型空間の線形部分空間は，核型である．

(50.4)　核型空間の閉線形部分空間を法とする商空間は，核型空間である．

(50.5)　核型空間の積空間は，核型である．

(50.6)　核型空間の可算位相的直和は，核型である．

(50.7)　核型空間の Hausdorff 射影極限は，核型である．

(50.8)　核型空間の可算帰納極限は，核型である．

(50.9)　E と F を核型空間とすれば，$E \widehat{\otimes} F$ は核型である．

---

1)　すなわち，核型空間から出発して，種々の構成法で新しい空間を構成するとき，核型という性質が保存されること．

命題50.1の証明に入る前に，命題で用いられている若干の術語の定義を思い出しておこう．まず，E が核型空間のときには，$E\widehat{\otimes}_\pi F$ あるいは $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ の代りに，単に $E\widehat{\otimes}F$ と書く（この記法は，今後も用いる）．

さて，$\{E_\alpha\}$ を局所凸空間の族とし，E は単なるベクトル空間としておく．

(i)　各添字 α に対して，線形写像 $\phi_\alpha : E \to E_\alpha$ があたえられたとしよう．このとき，E 上の位相であって，E の線形構造と整合し，写像 ϕ_α をすべて連続するものの中で，最も粗いものを考える．E にこの位相を入えれたものを，空間族 $\{E_\alpha\}$ の**射影極限** (projective limit) という．この位相に関する0の一つの近傍基底は，次のようにして得られる：各 E_α において0の近傍基底 $U_{\alpha,\beta}$ $(\beta \in B_\alpha)$ を考え，$U_{\alpha,\beta}$ の ϕ_α による逆像を $V_{\alpha,\beta}$ とする；そうして α, β があらゆる可能な仕方で動くときの $V_{\alpha,\beta}$ の有限個の共通部分の全体を考えれば，これが E 上の射影（極限）位相に関する0の近傍基底となす（これは，とくに，求める位相の存在も示している）．この位相は，E_α がすべて局所凸ならば，明らかに局所凸である．この位相が Hausdorff であるためには，任意の $x \in E$, $x \neq 0$ に対して少なくとも一つの添字 α が存在して，$\phi_\alpha(x) \neq 0$ となればよい．この条件が満たされないときには，E が Hausdorff でないことも起り得る．空間族 E_α の Hausdorff 射影極限 E は（位相もこめて）積空間 $\widetilde{E} = \prod_\alpha E_\alpha$ の線形部分空間と同一視することができる．（それは，写像 $x \mapsto (\phi_\alpha(x))_\alpha$ による）．

(ii)　今度は，各添字 α について，線形写像 $\phi_\alpha : E_\alpha \to E$ があたえられ，$E = \bigcup_\alpha \phi_\alpha(E_\alpha)$ となっているとしよう．E_α はすべて局所凸であるとする．このとき，E 上の位相として，写像 ϕ_α をすべて連続にするような，最も細かい局所凸位相を考える．E の凸部分集合 U がこの位相に関して0の近傍になるためには，各 α について，$U \cap \phi_\alpha(E_\alpha)$ が $\phi_\alpha(U_\alpha)$ (U_α は E における0の近傍）の形をしていることが必要十分である．E にこの位相を入れたものを，空間族 E_α の**帰納極限** (inductive limit) という．LF-空間が特殊の帰納極限になっていることは，直ちにわかるであろう．

(iii)　上に述べたものに密接に関連する概念として（実は，その特別の場合

であるが)，**局所凸的直和** (locally convex direct sum) の概念がある．この場合には，各写像 ϕ_α は単射であるとし，$E=\bigcup_\alpha \phi_\alpha(E_\alpha)$ という仮定を，E はベクトル空間 E_α の代数的直和になるという仮定によっておきかえる．すなわち，E の各元は $x=\sum_\alpha \phi_\alpha(x_\alpha)$ の形 (x_α は有限個を除いてはすべて 0) に唯一通りに書けるとするのである．このとき，E 上の**直和位相** (direct sum topology) とは，写像 ϕ_α をすべて連続にするような最も細かい局所凸位相のことを言う．E にこの位相を入れたものを，$\{E_\alpha\}$ の**位相的直和** (topological direct sum) という (各 E_α は局所凸であることに注意)[1]，E の凸部分集合 U が 0 の近傍であるための必要十分条件は，すべての α について $U\cap\phi_\alpha(E_\alpha)=\phi_\alpha(U_\alpha)$ (U_α は E_α における 0 の近傍) となることである．始めに述べたように，この概念は帰納極限の特別の場合である．それを見るには，次のようにすればよい．添字 α の各有限集合 A に対して，E_α ($\alpha\in A$) の有和を E_A と書き，これにその自然な位相 (すなわち，E_A と標準的に同一視される積 TVS $\prod_{\alpha\in A}E_\alpha$ の位相を持ち込んだもの) を入れる．$\phi_A: E_A\to E$ を

$$\sum_{\alpha\in A} x_\alpha \mapsto \sum_{\alpha\in A}\phi_\alpha(x_\alpha)$$

で定義される線形写像とする．こうすれば，E 上の直和位相は，空間族 $\{E_A\}$ の $\{\phi_A\}$ に関する帰納極限位相に他ならない．

逆に，空間族 $\{E_\alpha\}$ の写像族 $\{\phi_\alpha\}$ に関する帰納極限 E は，E_α の直和のその閉線形部分空間を法とする商と見なすことができる．直和としては，E_α の積 $\widetilde{E}$ の元 $(x_\alpha)_\alpha$ のうちで，有限個の α を除いて $x_\alpha=0$ となるもの全体のなす線形部分空間 $\widetilde{E}_0$ をとる．E_{α_0} から $\widetilde{E}_0$ への単射は，写像 $x_{\alpha_0}\mapsto(\tilde{x}_\alpha)_\alpha$, $\tilde{x}_\alpha=0$ ($\alpha\neq\alpha_0$), $\tilde{x}_{\alpha_0}=x_{\alpha_0}$ とする[1]．$\widetilde{E}_0$ の線形部分空間 M は，線形写像 $\phi:\widetilde{E}_0\to E$, $\phi((x_\alpha)_\alpha)=\sum\phi_\alpha(x_\alpha)$ の核とする．このとき，ϕ が $\widetilde{E}_0$ から E の上への準同形写像になることの検証は，読者に委せる．

---

1) 位相空間族の位相的直和とは異なる (Bourbaki 参照)．局所凸的直和の方が誤解を招かなくてよい．

1) これによって，$\widetilde{E}_0$ には局所凸的直和位相を入れる．

命題 50.1 の証明

(50.2) の証明. これは定理 50.1 から明らかである. なぜなら, 明らかに

$$E \widehat{\otimes}_\varepsilon F \cong \widehat{E} \widehat{\otimes}_\varepsilon F, \qquad E \widehat{\otimes}_\pi F \cong \widehat{E} \widehat{\otimes}_\pi F$$

が (標準的に) 成りたつからである.

(50.3) の証明. E_1 を核型空間 E の線形部分空間とする. E_1 上の任意の連続セミノルム $\mathfrak{p}_1$ は, E 上の連続セミノルム $\mathfrak{p}$ の E_1 への制限である. 仮定によって, E 上の二つのセミノルム $\mathfrak{r} \geqslant \mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ が存在して, 標準写像

$$\widehat{E}_\mathfrak{r} \to \widehat{E}_\mathfrak{q} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$$

は共に核型となる. 標準写像 $\widehat{E}_\mathfrak{r} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$ は**多重核型** (polynuclear) と言うことができる. その意味は, それが二つ (或はそれ以上) の核型写像の合成ということである. $\mathfrak{r}$ の E_1 への制限を $\mathfrak{r}_1$ とすれば, 標準写像 $(\widehat{E_1})_{\mathfrak{r}_1} \to \widehat{E}_\mathfrak{r}$ が存在するから, 標準写像

$$(\widehat{E_1})_{\mathfrak{r}_1} \to \widehat{E}_\mathfrak{p} \tag{50.10}$$

を得るが, これは明らかに多重核型である. ところで, 写像 (50.10) の像は, 閉部分空間 $(E_1)_{\mathfrak{p}_1}$ に含まれている. したがって, (50.3) の主張は, 次の補題から出る.

補題 50.1. 線型写像 $u : E \to F$ が多重核型 (すなわち, 少なくとも二つの核型写像の合成) とし, $u(E)$ は F の完備な線形部分空間 F_1 に含まれているとすれば, 写像 $u : E \to F_1$ は核型である.

補題 50.1 の証明. 写像 u は

$$E \xrightarrow{\ v\ } G \xrightarrow{\ w\ } F$$

と分解する. v, w は核型である. F は完備であると仮定してよい. なぜなら, w は値を $\widehat{F}$ にもつと見なしても, w は核型だからである. とくに, w は積分

型だから，次のように分解できる．

$$G \xrightarrow{a} H \xrightarrow{b} F$$

ここで，a, b は連続線形写像であり，H は Hilbert 空間である．$f = a \circ v$ とおけば，f は核型となり，u の分解は

$$E \xrightarrow{f} H \xrightarrow{b} F$$

となる．いま，$f(E)$ の H における閉包を H_1 とし，π を H から H_1 の上への正射影としよう．$g = \pi \circ f$ とおけば，g は核型であり，u の分解は

$$E \xrightarrow{g} H_1 \xrightarrow{b_1} F_1 \longrightarrow F$$

と書ける[1]．ここで，最後の矢印は自然単射である．実際，$b(f(E) \subseteq F_1)$ だから，これでよい．b_1 は連続だから，$b_1 \circ g$ は核型である．（証終）．

(50.4) の証明． E を核型空間とし，M を E の閉線形部分空間とする．$\phi : E \to E/M$ を標準写像としよう．$\dot{\mathfrak{p}}$ を E/M 上の連続セミノルムとすれば，$\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{p}} \circ \phi$ は E 上の連続セミノルムである．したがって，E 上の連続セミノルム $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p}$ が存在して，標準写像 $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ は多重核型となる．そこで，$\mathfrak{q}$ によって定義される E/M 上連続セミノルム $\dot{\mathfrak{q}}$ とする．$\dot{\mathfrak{q}}(\dot{x}) = \inf_{x \in \dot{x}} \mathfrak{q}(x)$．そうして，$\mathfrak{q}_1 = \dot{\mathfrak{q}} \circ \phi$ とおけば，$\mathfrak{q}$ の開単位球を U とするとき，$\mathfrak{q}_1$ の開単位球は $U+M$ に等しい．このことから，$\widehat{E}_{\mathfrak{q}_1}$ は $\widehat{E}_{\mathfrak{q}}$ の商空間であり，写像 $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ は

(50.11) $$\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{q}_1} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$$

と分解することが導かれる．ここで，矢印は共に標準写像である．ところで，容易にわかるように，$\widehat{E}_{\mathfrak{q}_1} \cong (E/M)_{\dot{\mathfrak{q}}}$, $\widehat{E}_{\mathfrak{p}} \cong (E/M)_{\dot{\mathfrak{p}}}$ が成り立つ．したがって，(50.11) における第二の矢印が核型であることを示せばよい．ところで，これは次の補題から出る．

補題 50.2. $u : E \to F$ を多重核型とし，写像列

---

1) b_1 は b の H_1 への制限．

$$E \xrightarrow{\phi} E/N \xrightarrow{\tilde{u}} F$$

の合成に等しいとする．ここで，N は E の閉線形部分空間，$\phi: E \to E/N$ は標準的準同形とし，$\tilde{u}$ は連続とする．このとき，もし F が完備ならば[1]，$\tilde{u}$ は核型である．

証　明. 仮定により，u は $E \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} F$ と分解できて，v, w は核型写像である．ここで，G は完備としてよい．なぜなら，w は G の完備化 $\hat{G}$ にまで拡張できるし (F が完備だからよい)．v は $\hat{G}$ に値をもつと見なせるからである．このとき，v は $E \xrightarrow{a} H \xrightarrow{b} G$ と分解できる．ここで，a, b は連続であり，H は Hilbert 空間である．$u(N)=0$ であることに注意して，$a(N)$ の H における閉包を H_1 とする．商空間に移ることによって，a は連続線形写像 $\bar{a}: E/N \to H/H_1$ を定義する．H/H_1 は，H における H_1 の直交補空間と同一視することができる．そこでは b が定義されているから，b の H/H_1 への制限を $\bar{b}$ と書けば，$\tilde{u}$ の分解として

$$E/N \xrightarrow{\bar{a}} H/H_1 \xrightarrow{\bar{b}} G \xrightarrow{w} F$$

を得る．w は核型であったから，$\tilde{u}$ も核型になることがわかる．

(50.5) の証明. $E=\prod_\alpha E_\alpha$ を核型空間 E_α の族の積とする．E 上の任意の連続セミノルムは，たかだか

$$\mathfrak{p}_A((x_\alpha)) = \sum_{\alpha \in A} \mathfrak{p}_\alpha(x_\alpha)$$

の形のセミノルムに等しい．ここで，A は添字 α の有限集合表わし，$\mathfrak{p}_\alpha$ は E_α 上の連続セミノルムである．このとき，$\hat{E}_{\mathfrak{p}_A}$ は明らかに有限積 $\prod_{\alpha\in A}(\widehat{E_\alpha})_{\mathfrak{p}_\alpha}$ に同形である．そこで，各 $\alpha \in A$ について，E_α 上の連続セミノルム $\mathfrak{q}_\alpha \geqslant \mathfrak{p}_\alpha$ を，標準写像 $(\widehat{E_\alpha})_{\mathfrak{q}_\alpha} \to (\widehat{E_\alpha})_{\mathfrak{p}_\alpha}$ が核型になるようにえらんで

1) この仮定は不要と思われる．実際，以下の証明において $G \xrightarrow{w} F$ は核型だから，$G \xrightarrow{w_1} G_1 \xrightarrow{w_2} G_2 \xrightarrow{w_3} F$ の形の分解をもつ．ここで，G_1, G_2 は Banach 空間であり，w_2 は核型である．したがって，w を $\hat{G}$ にまで拡張する (その仕方は一意的!) には，w_1 を $\hat{G}$ にまで拡張すればよく，それは G_1 が完備だから，可能である．w_1 の拡張を $\widehat{w}_1$ と書けば，w の拡張は $w_3 \circ w_2 \circ \widehat{w}_1$ に等しく，したがって，核型である．

$$\mathfrak{q}_A((x_\alpha)) = \sum_{\alpha\in A} \mathfrak{q}_\alpha(x_\alpha)$$

とおけばよい．このとき，$\widehat{E}_{\mathfrak{q}_A} \cong \prod_{\alpha\in A}(\widehat{E_\alpha})_{\mathfrak{q}_\alpha}$ から $\widehat{E}_{\mathfrak{p}_A}$ の標準写像は，核型写像の積だから，核型となる[1]

(50.6) の証明．E を核空間列 E_k $(k = 0, 1, \ldots)$ の位相的直和とする．$\mathfrak{p}$ を E 上の連続セミノルムとし，$\mathfrak{p}$ の E_k（E の線形部分空間と見なす）への制限を $\mathfrak{p}_k$ とする．仮定によって，E_k 上の連続セミノルム $\mathfrak{q}_k \geqslant \mathfrak{p}_k$ が存在して，標準写像 $u_k : (\widehat{E_k})_{\mathfrak{q}_k} \to (\widehat{E_k})_{\mathfrak{p}_k}$ 核型となる．これは，$(E_k)'_{\mathfrak{q}_k}$ の単位球に含まれる点列 $(x'_{k,n})$ と $(\widehat{E_k})_{\mathfrak{p}_k}$ の単位球に含まれる点列 $(y_{k,n})$ が存在し，l^1 に属する数列 $\{\lambda_{k,n}\}$ が存在して，写像 u_k は

$$x_k \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{k,n}\langle x'_{k,n}, x_k\rangle y_{k,n}$$

であたえられることを意味する[2]．E_k の双対 E_k' は，写像 $x_k' \mapsto (x \mapsto \langle x_k', x_k\rangle)$ によって，E' の部分空間と見なすことができることに注意しよう[3]．そこで，写像

$$u : x = \sum_k x_k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \rho_k^{-1}\lambda_{k,n}\langle \rho_k x'_{k,n}, x_k\rangle y_{k,n}$$

を考えよう．ここで，ρ_k は数 $\geqslant 2^k \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_{k,n}|$ とし，$y_{k,n}$ は Banach 空間 $(\widehat{E_k})_{\mathfrak{p}_k}$ の直和の元と見なす．この直和から $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ への標準写像は，明らかに連続である．他方，$x = \sum_k x_k \in E$ に対して

$$\mathfrak{q}(x) = \sup_k \rho_k \mathfrak{q}_k(x_k)$$

とおけば，$\mathfrak{q}$ は明らかに E 上の連続セミノルムであり[3]，$\rho_k x'_{k,n}$ はすべて $E_{\mathfrak{q}}'$ の閉単位球に属する．さらに，上の写像 u は，$\widehat{E}_{\mathfrak{q}}$ から $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ への標準写像を誘導するから，この標準写像は核型である．

(50.7) の証明．Hausdorff 射影極限は積空間の線形部分空間だから（証明の前

1) 命題 47.2 の系 2 の証明参照．

2) 命題 47.2 参照．

3) 局所凸的直和位相の定義によって，E 上の線形形式（もっと一般には E から局所凸 TVS への線形写像）またはセミノルムが連続であるための必要十分条件は，各 E_k への制限が連続になることである．

の諸注意参照). (50.3) と (50.5) を組合せればよい.

(50.8) の証明. 帰納極限は位相的直和の商だから (証明の前の諸注意参照). (50.4) と (50.6) を組合せればよい.

(50.9) の証明. 任意の局所凸 Hausdorff 空間 G に対して

$$(E \otimes F) \otimes_\varepsilon G = E \otimes_\varepsilon (F \otimes_\varepsilon G) = E \otimes_\pi (E \otimes_\pi G) = (E \otimes F) \otimes_\pi G$$

が成り立つことによる. ここで, $E \otimes F$ は $E \otimes_\varepsilon F = E \otimes_\pi F$ を示す. 位相テンソル積 π および ε に関する結合律は, それらの定義から直接出る.

命題 50.2. E を核型空間とする. このとき, 次のことが成りたつ.

(50.12) E の有界集合は, すべてプレコンパクトである.

(50.13) E の双対 E' の同等連続閉集合は, (強双対位相に関して) 距離付け可能なコンパクト集合である.

(50.14) E は Hilbert 空間族の積空間の線形部分空間である.

(50.12) の証明. B を E の有界集合とし, $\mathfrak{p}$ を E 上の連続セミノルムとして, $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ をもう一つの連続セミノルムで, $\widehat{E}_\mathfrak{q} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$ が核型になるものとする. このとき, E から $\widehat{E}_\mathfrak{p}$ への標準写像は,

$$E \to \widehat{E}_\mathfrak{q} \to \widehat{E}_\mathfrak{p}$$

と分解される. ここで, 矢印は共に連続線形写像であり, 二番目の矢印はコンパクト写像だから, B の $\widehat{E}_\mathfrak{p}$ における標準像[1] はプレコンパクトである. $\mathfrak{p}$ は任意であったから, これから直ちに B がプレコンパクトなことが出る.

(50.13) の証明. A' を E' の同等連続閉集合とする. A' は凸平衡的と仮定してよい. これに対して, もう一つの同等連続閉凸平衡的集合 $B' \supseteq A'$ が存在して, 単射 $E_{A'} \to E_{B'}$ が核型となる. このとき, A' の $E_{B'}$ における像はプレコンパクトである. ところで, それは閉であり[2], $E_{B'}$ Banach 空間だから

1) canonical image, すなわち標準写像による像.

2) E' の位相 $b(E', E)$ に関して閉だから, それより細かい $E_{B'}$ の位相に関して閉.

(B' は弱コンパクトにとれる[1]), A' は $E_B{}'$ の部分集合としてコンパクトになる．もちろん，距離付け可能である．E' の位相を A' に誘導したものは $E_B{}'$ から誘導したものより弱いから，A' は E' のコンパクトな距離付け可能な部分集合である．

(50.14) の証明． $\mathfrak{p}$ を E 上の任意の連続セミノルムとするとき，もう一つの連続セミノルム $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ が存在して，$\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ は核型，したがって積分型となる．ゆえに，Hilbert 空間 $H_{\mathfrak{p}}$ が存在して，この標準写像は

$$\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to H_{\mathfrak{p}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$$

と分解される．そこで，E から $\widehat{E}_{\mathfrak{q}}$ への標準写像を用いて，E から $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ への標準写像の分解

$$E \to H_{\mathfrak{p}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$$

を得る．この一番目の矢印に対する写像を $i_{\mathfrak{p}}$ と書き，積 TVS $\prod_{\mathfrak{p}} H_{\mathfrak{p}}$ を $\mathscr{H}$ で表わせば，E から $\mathscr{H}$ への写像 $x \mapsto (i_{\mathfrak{p}}(x))_{\mathfrak{p}} \in \mathscr{H}$ が中への TVS 構造に関する同形写像になることが直ちに検証できる[2]．

系 1． E を準完備核型空間とすれば，E の有界閉集合はすべてコンパクトである．

TVS E が準完備であるとは，E の有界閉集合がすべて完備になることであったのを思い出そう．Banach 空間は完備だから，もちろん準完備である．したがって

系 2． 可ノルム空間が核型であるための必要十分条件は，それが有限次元になることである．

1) A' の E における極集合のゲージを $\mathfrak{p}$ とするとき，E 上の連続セミノルム $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ を $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ が核型となるようにとり，$\mathfrak{q}$ の閉単位球の E' における極集合を B' とすればよい (命題47.5の系参照)．

2) 二番目の矢印に対する写像を $k_{\mathfrak{p}}$ と書き，積 TVS $\prod_{\mathfrak{p}} \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ を $\mathscr{K}$ と書けば，写像列 $E \xrightarrow{i} \mathscr{H} \xrightarrow{k} \mathscr{K}$ を得る ($i : x \mapsto (i_{\mathfrak{p}}(x))_{\mathfrak{p}}$; $k : (y_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \to (k_{\mathfrak{p}}(y_{\mathfrak{p}}))_{\mathfrak{p}}$)．$j = k \circ i : E \to \mathscr{K}$ は (中への) 同形写像だから，i もそうなる．

E が核型になるための必要十分条件は，$\widehat{E}$ が核型になることであったのを思い出せばよい．

系 3. 準完備樽型空間が核型であれば，それは Montel 空間である．

核型空間および核型でも可ノルムでもない空間の若干の例を次章でとり上げる．とくに，性質 (50.6) および (50.8) における可算性の制限が，(一般には) 取り除けないことがわかるであろう．

命題 50.3. E を核型空間とする．このとき，E の恒等写像は，E からそれ自身への連続写像のうちで，その像が有限次元になるものの，E の各コンパクト集合上での，一様極限として得られる．すなわち，E は次の近似条件を満たす．

(A)　E の任意のコンパクト集合と，E の 0 の任意の近傍 U に対して，有限次元の像をもつ連続線形写像 $u: E \to E$ が存在して，すべての $x \in K$ について $u(x)-x \in U$ が成りたつ．

証　明. U を E 上の連続セミノルム $\mathfrak{p}$ の閉単位球としてよい．もう一つの連続セミノルム $\mathfrak{q} \geqslant \mathfrak{p}$ を，標準写像 $\widehat{E}_{\mathfrak{q}} \to \widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ が核型となるようにえらぶ．このとき，可換図式

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{I} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{E}_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & \widehat{E}_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

を得る．ここで，I は恒等写像であり，他の矢印はすべて標準写像を表わす．下の方の水平な矢印は，次の形の写像としてよい．

$$\hat{x} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle x_k', \hat{x} \rangle \hat{y}_k \tag{50.15}$$

ここで，$\{x_k'\}$ は $E_{\mathfrak{q}}'$ において有界，$\{\hat{y}_k\}$ は $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ において有界，そして $(\lambda_k) \in l^1$ である．写像 (50.15) は，写像列

$$\widehat{x} \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle x_k', \widehat{x} \rangle \widehat{y}_k \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

の $L(\widehat{E}_{\mathfrak{q}}, \widehat{E}_{\mathfrak{p}})$ における，作用素ノルムに関する，極限であり，この写像列の各元は次の形の写像

$$\widehat{x} \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle x_k', \widehat{x} \rangle y_{j,k} \qquad (j=0, 1, \ldots)$$

の極限である．ここで，$y_{j,k}$ は E の $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ における像に属するものとする．これは，E の像が $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ において稠密なことによる(定義によって，$\widehat{E}_{\mathfrak{p}}$ は $E/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{p}$ の完備化だから)．このようにして結局，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分大きな整数 j と n をとるならば，$\mathfrak{q}(x) \leqslant 1$ を満たすようなすべての $x \in E$ について

$$x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle x_k', x \rangle y_{j,k} \in \varepsilon U$$

を得る[1]．K を E の任意の有界集合とするならば，$\varepsilon>0$ として，$\varepsilon K \subseteq U_{\mathfrak{q}} = \{x \in E;\ \mathfrak{q}(x) \leqslant 1\}$ となるようにえらべばよい．(証終)．

注意 50.2. いずれにしても，読者は，性質(A)が核型空間に特有なものと考えてはならない．実際，Hilbert 空間はすべてこの性質をもつこと(補題 48.3)，L^p 空間 $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ がこの性質をもつこと，コンパクト(または局所コンパクト)空間上の複素連続関数の空間 $\mathcal{C}(X)$ についても同様であることを見るのは難しくない．実際には，性質(A)をもたない空間は知られていないのである！[2]

E を核型空間としよう．E の弱コンパクト部分集合は，その始位相に関して有界である(これは，Mackey の定理により，一般に正しい)．逆に，E の有界集合はすべてプレコンパクトだから，もし E が核型かつ完備ならば，E' 上の位相 $\tau(E', E)$ はその強双対位相(これは $b(E', E)$ で示すことが多い)に一致する．

---

1) ここでは，$y_{j,k} \in E$.

2) Banach 空間であって，この性質をもたない例の存在することが，最近報告された(P. Enflo: A counter example to the approximation problem, *Acta Math*, 130 (1973) 309-317 参照).

命題 50.4. E を核型かつ完備な空間とし，F を完備な局所凸 Hausdorff 空間とすれば，

$$E \hat{\otimes} F \cong L_\varepsilon(E_b' ; F) \cong L_\varepsilon(F_\tau' ; E)$$

が成り立つ.

証　明. $L_\varepsilon(E_b' ; F)$ が完備になることは既知である (命題 42.3). したがって，有限次元の像をもつ写像のなす線形部分空間が，そこで稠密なことを示せば十分である. そのために，$L_\varepsilon(E_b' ; F') \cong L_\varepsilon(F_\sigma' ; E_\sigma)$ であることに注意し[1]，その元 $v : F_\sigma' \to E_\sigma'$ を考える. B' を F' の同等連続集合とする. B' は弱閉と仮定してよいが，そのとき B' は弱コンパクトである. したがって，$v(B')$ は E において弱コンパクトとなり (v は連続だから)，したがって，E においてコンパクトである[2]. そこで，$K = v(B')$ とおき，U を任意として，性質 (A) を用いるならば，有限次元の像をもつ $u : E \to E$ が存在して，すべての $y' \in B'$ について

$$v(y') - u(v(y')) \in U$$

が成りたつ. 写像 $u \circ v$ は有限次元の像をもち，連続だからよい. (証終).

命題 50.5. E, F を二つの局所凸 Hausdorff 空間として，次の仮定をおく：(i) E, F は完備である；(ii) E は樽型である；(iii) E' は核型かつ完備である. このとき，$L_b(E ; F)$ は完備となり，

$$E' \hat{\otimes} F \cong L_b(E ; F)$$

が成り立つ.

証　明, まず，E' が半回帰的であること (すなわち，ベクトル空間としてその陪双対 E''' に等しいこと) を示すことから始める. そのために，定理 36.3 を適用する：$\sigma(E', E'')$ に関する E' の有界閉集合 A' は，もちろん $b(E', E)$ の意味で閉であり，Mackey の定理によって，有界である. ところで，E' は核型かつ完備だから，A' はコンパクトとなり，もちろん $\sigma(E', E'')$ に関してコン

---

1) $L_\varepsilon(E_b' ; F) = L_\varepsilon(E_\tau' ; F) \cong \mathcal{B}(E_\sigma', F_\sigma') \cong L(F_\sigma' ; E_\sigma)$ (命題 42.2 参照).

2) E が核型かつ完備だから.

パクトとなる．これで，主張は証明された．

E' が半回帰的であるが，これから E の回帰性が出る．実際，E の位相はその Mackey 位相 $\tau(E, E')$ に等しいから，自然単射 $E \to E''$ は中への同形写像であるが，E は完備だから，それは E'' の閉線形部分空間である．ところで，E'' と $E \subseteq E''$ とは同じ双対 $E' = E'''$ をもつから，E と E'' は一致しなければならない．さらに，E' は樽型であり（命題 36.4 参照），したがって，E' は Montel 空間になることに注意しよう．ゆえに，Montel 空間の強双対として，E もまた Montel 空間である（命題 36.10）．

いずれにしても，E', F は共に完備だから，命題 50.4 が適用できて，

$$E' \hat{\otimes} F = L_\varepsilon(E; F)$$

を得る．ところで，Montel 空間の双対においては，同等連続集合と強有界集合とは一致するから（定理 33.2），命題 50.5 が成り立つ．（証終）．

命題 50.5 は超関数の理論において，種々の応用がある．

系． 命題 50.5 の仮定のもとで，もし F が核型ならば，$L_b(E; F)$ は核型空間である．

これには，命題 50.5 と (50.9) を組合せればよい．

最後に，Fréchet 空間に関する給果をいくつか述べて，この章を終えよう．

命題 50.6. Fréchet 空間 E が核型であるための必要十分条件は，その強双対が核型になることである．

証明 1. E を核型とすれば，E は Montel 空間となり（命題 50.2 の系 3），したがって，E は回帰的である．$u: F \to E$ を Banach 空間 F から E への連続線形写像として，$G = F'$ とおけば，u の陪転置 ${}^{tt}u: G' \to E'' = E$ は弱連続である（ここで‘弱’とは，G には位相 $\sigma(G', G)$，E には位相 $\sigma(E, E')$ を入れて考えること）．これは，${}^{tt}u \in L(G_\sigma'; E_\sigma) = L(E_\tau'; G)$ を意味する（命題 42.2）．E は核型だから，後者の空間は $E \hat{\otimes} G$ に等しい（命題 50.4）．そこで，Fréchet

空間の完備 π-積に関する基本定理 (定理 45.1) を用いれば：写像 ${}^{tt}u$ は元 $\theta \in E_A \widehat{\otimes}_\pi G$ によって表現される；ここで，A は E の閉凸平衡的有界集合である[1]. これから直ちに，${}^{tt}u$ が核型写像であることがわかる[2]. したがって，${}^{tt}u$ の閉部分空間 $F \subseteq G' = F''$ への制限も核型になるが，この制限は u に等しい. かくして，定理 50.1 の条件 (c) が満たされているから，E' が核型になることが結論される.

証明 2. 今度は，E' を核型とする，E' は完備になるから (定理 32.2 の系 2), E' は Montel 空間である (命題 50.2 の系 3). したがって. E' は回帰的である. ところで，E はその陪双対 E'' の閉線形部分空間と見なすことができるが，E と E'' は同一の双対をもつから，それらは等しくなければならない. かくして，E は半回帰的となるが，半回帰的な樽型空間は回帰的である[3]. さて，任意の Banach 空間があたえられたとして，標準写像 $E \widehat{\otimes}_\pi F \to E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ が同形写像になることを示そう.

まず，この写像は上への写像である. 実際，$\theta \in E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ とすれば，θ は連続線形写像 $E' \to F$ を定義する[4]. E' が核型空間であることから，定理 50.1 (c) により，θ によって定義されるこの写像は核型である. ゆえに，この写像は $E'' \widehat{\otimes}_\pi F$ の元によって定義されるが[5]，$E'' = E$ だからよい.

---

1) 定理 45.1 において，数列 $\{x_n\}$ の閉凸平衡包を A とすればよい. このとき，級数 (45.1) が Banach 空間 $E_A \widehat{\otimes}_\pi G$ において絶対収束することは，$\|x \otimes y\|_\pi = \|x\| \, \|y\|$ を用いて容易に検証できる.

2) ${}^{tt}u : G' \to E$ は $G' \to E_A \to E$ と分解されて，最初の矢印が核型になるからである (二番目のは標準写像).

3) ここの議論をまとめれば，次の一般的命題となる：《完備樽型空間が回帰的であるためには，その強双対 E' が回帰的であることが必要十分である.

4) 命題 42.3 と定義 43.6 につづく注意参照.

5) $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ を $E'' \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ に埋めて考える (これは命題 43.7 によって許される). θ は核型写像 $E' \to F$ を表わすから，E'' の凸平衡的同等連続部分集合 U'' と F の劣完備な凸平衡的有界集合 B が存在して，θ は標準写像 $E''_{U''} \widehat{\otimes}_\pi F_B \to E'' \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ の像に含まれる. ところで，標準的連続線形写像から成る可換図式

$$\begin{array}{ccc} E''_{U''} \otimes_\pi F_B & \longrightarrow & E'' \otimes_\varepsilon F \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & E'' \otimes_\pi F & \end{array}$$

を，連続性によって，完備化にまで拡張したものを考えて見れば，θ が写像 $E'' \widehat{\otimes}_\pi F \to E'' \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ の像に含まれることは，明らかである.

次に，写像 $E\widehat{\otimes}_\pi F \to E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ が1対1になることを示そう．この写像の転置は，自然単射 $J(E, F) \to B(E, F)$ である．したがって，この像が $B(E, F) = (E\otimes_\pi F)'$ 上の弱双対位相に関して稠密であることを示せば十分である．そこで，定理45.1の系2を適用する：各元 $\theta \in E\widehat{\otimes}_\pi F$ は，E の適当なコンパクト集合 H と F の適当なコンパクト集合をとれば，そのテンソル積 $H\otimes K$ の閉凸平衡包 $\Gamma(H\otimes K)$ に属する．したがって，$E'\otimes F' \subseteq J(E, F)$ が $B(E, F)$ において，二つのコンパクト集合の積集合上の一様収束位相に関して，稠密になることを示せば十分である．そこで，$B(E, F)$ の元を写像 $u: F\to E'$ と見なすことにすれば，$E'\otimes F'$ の元は有限次元の像をもつ写像 $v: F\to E'$ となる．ところで，E' は核型だから，命題50.3における性質(A)をもつ．すなわち，E' の恒等写像は，有限次元の像をもつ連続線形写像 $w: E'\to E'$ によって，E' の各コンパクト集合上で一様に近似できる．このとき，$w\circ u \in E'\otimes F'$ の形の写像が，F の各コンパクト集合上で一様に，u に収束することは明らかであろう．これで，$E'\otimes F'$ の $B(E, F)$ における稠密性が証明できた．

このようにして，写像 $E\widehat{\otimes}_\pi F\to E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ は上への1対1の写像であることが示された．この写像は連続であり，二つの完備テンソル積は共に Fréchet 空間だから，開写像定理により，この写像は同形写像である．

命題 50.7. E, F を二つの Fréchet 空間とする．もし E が核型ならば，次の標準的同形が成りたつ．

$$E'\widehat{\otimes} F' \cong B(E, F) \cong (E\widehat{\otimes} F)'.$$

ここでは，F も核型である場合の証明だけを述べる．一般の場合の証明は，少々長たらしくなる．

命題50.7の証明 (E, F 共に核型の場合)．$u: E\to F'$ を連続線形写像とすれば，$E\times F$ 上の双線形形式 $(x, y)\mapsto \langle u(x), y\rangle$ は分離連続であり，したがって，連続である[1]．これは，ベクトル空間としての同形

1) 定理34.1の系参照．

(50.16) $$B(E, F) \cong L(E;\, F')$$

が成り立つことを意味する．命題 50.5 を見れば，その仮定は明らかに満たされているから，

$$E' \hat{\otimes} F' \cong L(E;\, F')$$

を得る．ここで，同形は位相も込めて成りたつ（$L(E;\, F')$ の位相は有界収束の位相である）．したがって，(50.16) が位相も含めて成りたつことを示せば十分である．$L(E;\, F')$ における有界収束の位相は，$B(E, F)$ における各積集合 $A \times B$（A, B はそれぞれ E, F の有界集合）上の一様収束の位相と同値である．これは，$B(E, F)$ と $E \hat{\otimes} F$ との双対性を用いるのならば，各テンソル積 $A \otimes B$（A, B は上と同様）の閉凸平衡包の上の一様収束位相と言ってもよい．他方，$B(E, F)$ に入っている位相は，$E \hat{\otimes} F$ の各有界集合上の一様収束位相である．したがって，$E \hat{\otimes} F$ の任意の有界集合が，E, F の有界集合のテンソル積 $A \otimes B$ の閉凸平衡包に含まれることを示せばよい．このことは，E が核型（F は核型でなくてもよい）と言う仮定のもとで，正しいのである．ところで，E と F が共に核型という場合であれば，$E \hat{\otimes} F$ も核型である（命題 50.1, (50.9)）．したがって，Fréchet 空間 E, F および $E \hat{\otimes} F$ において，有界集合はすべて相対コンパクトである．このときには，定理 45.2 の系 2 を適用すれば十分である．

（証終）．

命題 50.4, 50.5 および 50.6 を用いるならば，E, F が Fréchet 空間であって，E（したがって E'）が核型であれば

(50.17) $$E \hat{\otimes} F \cong L(E';\, F)$$

(50.18) $$E' \hat{\otimes} F \cong L(E;\, F)$$

(50.19) $$E' \hat{\otimes} F' \cong (E \hat{\otimes} F)' \cong B(E, F)$$

が成りたつ．ここで，双対空間には強双対位相，連続線形写像の空間には各有界集合上の一様収束位相，$B(E, F)$ には有界集合の各積集合上の一様収束位相をそれぞれ入れて考えている．

51.

核型空間の例．核定理

この章において，超関数の理論において最も重要な諸空間 $\mathscr{E}_c^\infty$, $\mathscr{E}^\infty$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{E}'$, $\mathscr{S}'$ が核型空間であることを証明する．$\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω 上の正則関数の空間 $H(\Omega)$ も核型であり，n 変数の多項式の空間 $\mathscr{P}_n$, その双対となる n 変数の形式的巾級数の空間 $\mathscr{Q}_n$ もまた核型である．この後者の空間の核型性の証明が最も容易である．実際

定理 51.1. S を任意の集合とするとき，積空間 $\mathbf{C}^S$ は核型である．

これには，命題 50.1, (50.5) を適用すれば十分である．ここで，空間 $\mathbf{C}^S$ は，すべての関数 $S\to\mathbf{C}$ のなす空間に単純収束の位相を入れたものであることに注意しょう．さて，$\mathscr{Q}_n$ は n 重の添字をもつ数列の空間と同一視することができる．あるいは，同じことであるが，n 個の整数 $\geqslant 0$ からなる n-系 $p=(p_1, \ldots, p_n)$ の集合 $\mathbf{N}^n$ 上のすべての関数の空間と同一視できる．同一視の仕方は明らかである：$u\in\mathscr{Q}_n$ に対して，各 $p\in\mathbf{N}^n$ に u の p 番目の係数 u_p を対応させる関数を対応させればよい．定理 51.1 において，$S=\mathbf{N}^n$ とすることによって，次の系を得る．

系 1. n 変数の形式的巾級数の空間 $\mathscr{Q}_n$ に，係数の単純収束の位相を入れたものは，核型空間である．

系 2. n 変数の多項式の空間 $\mathscr{P}_n$ に，その LF-位相を入れたものは，核型

空間である．

実際，$\mathscr{P}_n$ は $\mathscr{Q}_n$ の強双対であり，後者は核型 Fréchet 空間である．したがって，命題 50.6 を適用すればよい．

上の系 2 は，次のようにしても証明できる：$\mathscr{P}_n$ は位相的直和 $\sum_{p\in\mathbf{N}^n}\mathbf{C}_p$ と同一視できる（各 $\mathbf{C}_p$ は複素平面 $\mathbf{C}$ のコピーである）．そこで，命題 50.1, (50.6) を適用すればよい．ついでに，(50.6) および (50.8) における可算性の制限は，省くことができないことを示しておこう．

定理 51.2. 集合 S が可算でないないならば，位相的直和

$$\mathbf{C}_S = \sum_{s\in S}\mathbf{C}_s \quad (\text{すべての } s \text{ について，} \mathbf{C}_s \cong \mathbf{C})$$

は，核型ではない．

証　明　$\mathbf{C}_S$ の双対が積空間 $\mathbf{C}^S = \prod_{s\in S}\mathbf{C}_S$ に同形になることは，容易にわかる．そうして，$\mathbf{C}_S$ の双対 $\mathbf{C}^S$ の同等連続部分集合は，$\mathbf{C}^S$ のコンパクト部分集合である．もし $\mathbf{C}_S$ が核型であるならば，これらのコンパクト集合は距離付け可能でなければならない（命題 50.2）．しかし，$[0,1]^S$ のようなコンパクト集合が距離付けできるのは，S が可算のときに限る．

注意 51.1. 定理 51.1 と 51.2 から，核型空間（例えば，$\mathbf{C}^S$, S：非可算）の双対は必ずしも核型になるとは限らないことがわかる．かくして，命題 50.6 は Fréchet 空間の一つの性質を述べているのである．これが Fréchet 空間に特有の性質であるというのでは全くないが，一般の空間に対して成りたつのではない．

$\mathscr{C}^\infty$ 型の諸空間の核型性は，**急減少数列** (rapidly decreasing sequence) のなす空間 s が核型になるという事実から従う．

これから考察する数列は n 個の添字 $p_1,\ldots,p_n$ をもつが，これらの添字は正，負または 0 に等しい整数とする．そうして，記号 $|p|=\sum_{j=1}^n|p_j|$ を用いる．n-系 $p=(p_1,\ldots,p_n)$, p_j：整数 $\geqq 0$ または <0 の全体のなす集合を $\mathbf{Z}^n$ で表わす．このように，今までの慣用の記法を少し変える理由は，急減少数列を Fourier

級数と結びつけたいからである.

複素数列 $\sigma=(\sigma_p)_{p\in\mathbf{Z}^n}$ が急減少数列であるとは, 任意の定数 $k\geqslant 0$ に対して

$$\sum_{p\in\mathbf{Z}^n}(1+|p|)^k|\sigma_p| \tag{51.1}$$

が有限になるときに云う. 急減少数列の全体はベクトル空間をなす. この空間を s で表わし, セミノルムの族 (51.1), $k=0, 1, 2,\ldots$ で定義される位相を入れて考える. s が Fréchet 空間になることは, 容易に検証できる.

数列が $\tau=(\tau_p)$ で**緩増大数列** (slowly increasing sequence) であるとは, 定数 $k\geqslant 0$ が存在して, 数列 $\{(1+|p|)^{-k}\tau_p\}$ が有界になることを云う. このとき, 写像

$$\tau=(\tau_p)\mapsto\left(\sigma=(\sigma_p)\mapsto\sum_{p\in\mathbf{Z}^n}\sigma_p\tau_p\right)$$

が, 緩増大数列のなす空間 (それを s' で表わす) から s の双対の上への (ベクトル空間構造に関する) 同形写像になることの検証は, 読者に委せる.

われわれにとって, 急減少数列の重要性は, 周期的 $\mathcal{C}^\infty$ 関数の Fourier 係数がそのような数列をなすことにある. $\mathbf{\Pi}^n$ によって, 超立方体 $[0, 1]^n$ ($\mathbf{R}^n$ の部分集合と見る) を表わそう. そうして, $\mathbf{\Pi}^n$ を**周期領域** (period) とするような[1], $\mathbf{R}^n$ 上の周期的 $\mathcal{C}^\infty$ 関数全体のなすベクトル空間を $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ で表わす. $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ には, $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ からの誘導位相 (すなわち, 関数およびその各階の導関数の一様収束の位相) を入れる. この位相によって, $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ は Fréchet 空間となる. そうして, 任意の $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ と任意の $p\in\mathbf{Z}^n$ に対して,

$$\hat{u}_p=\int_{\mathbf{\Pi}^n}\exp(-2i\pi\langle p, x\rangle)u(x)\,dx$$

とおく. ただし, $\langle p, x\rangle=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$ とする. いま, $\alpha\in\mathbf{Z}^n$ を任意にとるとき, u が滑らかであることと周期性を用いれば

$$(2i\pi p)^\alpha\hat{u}_p=\int_{\mathbf{\Pi}^n}\exp(-2i\pi\langle p, x\rangle)(\partial/\partial x)^\alpha u(x)\,dx$$

を得る. このことから直ちに, 数列 $(\hat{u}_p)$ が s に属することがわかる. 逆に,

---

1) 普通に言うならば, $\mathbf{R}^n$ の基底ベクトル $e_j=(0,\ldots, 0, \overset{\frown}{\underset{j\,\text{番目}}{1}}, 0,\ldots, 0)$, $(j=1, 2,\ldots, n)$ を周期とするような.

$\sigma = (\sigma_p)$ を s に属する数列とするとき，級数

$$\sum_{p \in \mathbf{Z}^n} \sigma_p \exp(2i\pi\langle p, x\rangle)$$

は $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ において，周期的な一つの関数 u に収束する．その p 番目の Fourier 係数は，σ_p に等しい．対応の連続性も容易にわかるから，次のように述べることができる．

定理 51.3. Fourier 展開 (Fourier expansion) $u \mapsto (\hat{u}_p)_{p \in \mathbf{Z}^n}$ は，周期的 $\mathscr{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ から急減少数列の空間 s の上への同形写像である．

この陳述において，同形写像は TVS 構造の意味でのものである．

空間 s と $\mathscr{S}$ の間の類似性やそれらの双対 s' と $\mathscr{S}'$ の間の類似性を重要視する必要は全くない．$\mathbf{R}^n$ 上の周期的超関数の空間 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)^\natural$ の元の Fourier 展開は，この空間から s' の上への同形写像である．さらに空間 $\mathscr{S}$ 自身が，空間 $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ の中へ同形的に埋め込むことができるのである．さて，そのような埋め込みの一つを手取り速く述べておこう．$\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ に属する関数のうちで，超立方体 $\mathbf{II}^n$ の境界で無限次の 0 となるもの[1] 全体のなす部分空間を $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ で示す．$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ には，$\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ からの誘導位相を入れる．これによって，$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ は Fréchet 空間となる．

$h(t)$ によって，$0 < t < 1$ 上で次式によって定義される関数を表わす．

$$h(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{t}.$$

そうして，各 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(h(x_1), \ldots, h(x_n)), \quad 0 < x_j < 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

とおけば，$\tilde{\phi}$ は $\mathbf{II}^n$ の境界において 0 となることは，直ちにわかる．$\phi^\natural$ によって，$\mathbf{II}^n$ 上では $\tilde{\phi}$ に一致する周期関数 (その周期領域は $\mathbf{II}^n$) を表わすことにする．このとき，次の結果の証明は，読者の演習問題としょう．

1) すなわち，$\mathbf{II}^n$ の境界の各点において，その関数自身およびその各階の導関数がすべて 0 になるもの．

定理 51.4. 写像 $\phi \mapsto \phi^\natural$ は，無限遠において急減少な $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ から，$\mathbf{II}^n$ の境界において無限次の 0 となる（周期領域 $\mathbf{II}^n$ の）周期的 $\mathcal{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)^\natural$ の上への，（TVS 構造に関する）同形写像である．

$\mathbf{II}^n = [0, 1]^n \subseteq \mathbf{R}^n$ であったことを思い出そう．

超関数の理論において現れる主な諸空間の核型性は，次の結果から従う．

定理 51.5. 急減少数列のなす Fréchet 空間 s は，核型空間である．

証明 セミノルム (51.1) を $\mathfrak{p}$ で表わそう．$\mathfrak{p}$ はもちろん一つのノルムである．このノルムによる s の完備化 $\hat{s}_{\mathfrak{p}}$ は，(51.1) が有限となるようなすべての複素数列 $\sigma = (\sigma_p)_{p \in \mathbf{Z}^n}$ のなす Banach 空間 $s(k)$ である．その双対は

(51.2)
$$\sup_p (1+|p|)^{-k} |\tau_p|$$

が有限となるような複素数列 $\tau = (\tau_p)$ のすべてからなる Banach 空間 $s'_{(k)}$ である ($s'_{(k)}$ には，ノルム (51.2) を入れて考える)，e_p によって，その第 p 項が 1 に等しく，他の項がすべて 0 となる数列を表わそう．そうして，$s'_{(k+n+1)} \hat{\otimes}_\pi s_{(k)}$ の次の形の元

$$\theta = \sum_{p \in \mathbf{Z}^n} \lambda_p x_p' \otimes y_p$$

を考える．ここで，

$$\lambda_p = (1+|p|)^{-n-1}, \qquad \text{（したがって，数列 } (\lambda_p) \text{ は可総和）}$$
$$x_p' = (1+|p|)^{k+n+1} e_p, \quad \text{（これは } s'_{(k+n+1)} \text{ の単位球に属する）}$$
$$y_p = (1+|p|)^{-k} e_p, \qquad \text{（これは，} s_{(k)} \text{ の単位球に属する）．}$$

とする．

さて，$\sigma = (\sigma_p)$ を $s_{(k+n+1)}$ の任意の元とするとき，

$$\theta(\sigma) = \sum_{p \in \mathbf{Z}^n} \lambda_p (1+|p|)^{n+1} \sigma_p e_p = \sum_{p \in \mathbf{Z}^n} \sigma_p e_p = \sigma$$

が成りたつ．これは，θ が $s_{(k+n+1)}$ から $s_{(k)}$ への自然単射であることを意味している．かくして，この単射が核型であることが証明された．ところで，$s_{(k+n+1)}$ は空間 s の (51.2) の形の（ただし，k を $k+n+1$ でおきかえた）ノル

ム q に関する完備化 $\hat{s}_q$ であると考えられる．これで，s の核型性が証明された．

系． 次の諸空間は核型である：

$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{E}_c^\infty(K)$ （K : $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合）；

$\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$, $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega)$ （Ω : $\mathbf{R}^n$ の開集合）；

$H(\Omega)$, $H'(\Omega)$ （Ω : $\mathbf{C}^n$ の開集合）．

系の証明 定理 51.3 と 51.4 を組合せることによって，$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ は s の部分空間に同形であり，したがって核型である ((50.3) 命題 50.1)．その双対 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ は命題 50.6 により，その部分空間 $\mathscr{E}_c^\infty(K)$ は (再び) (50.3) により，核型である．そうすれば，(50.8) によって，$\mathscr{E}_c^\infty(K)$ の可算帰納極限として，$\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ は核型である．核型 Fréchet 空間 $\mathscr{E}_c^\infty(K)$ の双対は核型だから，直ちにわかるように $\mathscr{D}'(\Omega)$ はそのような双対の射影極限として，(50.7) から $\mathscr{D}'(\Omega)$ の核型性が出る．他方，各コンパクト集合 $K \subseteq \Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ に対して関数 $\phi_K \in \mathscr{E}_c^\infty(K)$ をえらんで，任意の点 $x \in \Omega$ に対して集合 K が存在して，ϕ_K は x の或る近傍のすべての点において 0 にならないようにする．このとき，$\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ は写像族 $f \mapsto \phi_K f$ に関して $\mathscr{E}_c^\infty(K)$ の射影極限となる．ゆえに，(50.7) により，$\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ は核型であり，したがって，命題 50.6 により，$\mathscr{E}'(\Omega)$ も核型となる．最後に，$H(\Omega)$ は $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ (Ω は $\mathbf{R}^{2n}$ の部分集合と同一視する) の部分空間だから核型であり，$H'(\Omega)$ は核型 Fréchet 空間の双対として核型となる (命題 50.6)．

定理 51.6. 次の標準的同形が成り立つ．

(51.3) $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m) \hat{\otimes} \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \cong \mathscr{S}(\mathbf{R}^{m+n})$；

(51.4) $\mathscr{E}^\infty(X) \hat{\otimes} \mathscr{E}^\infty(Y) \cong \mathscr{E}^\infty(X \times Y)$ ($X \subseteq \mathbf{R}^m$, $Y \subseteq \mathbf{R}^n$: 開集合)；

(51.5) $\mathscr{E}_c^\infty(K) \hat{\otimes} \mathscr{E}_c^\infty(L) \cong \mathscr{E}_c^\infty(K \times L)$ ($K \subseteq \mathbf{R}^m$, $L \subseteq \mathbf{R}^n$: コンパクト集合)；

(51.6) $H(X) \hat{\otimes} H(Y) \cong H(X \times Y)$ ($X \subseteq \mathbf{C}^m$, $Y \subseteq \mathbf{C}^n$: 開集合)．

証 明 (51.3) だけを証明する．他の場合も，証明はすべて同様だからである．定理 39.2 によって，$\mathscr{S}(\mathbf{R}^m) \otimes \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$ において稠密であ

る. したがって, 後者が前者に誘導する位相が, 位相 $\pi=\varepsilon$ であることを示せばよい. ところで, $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m)\times\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$ への双線形写像 $(u, v)\mapsto u\otimes v$ は連続だから(分離連続だから[1]), 誘導位相は π よりも粗い. 他方, $\{f_\nu\}$ が $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{m+n})$ において0に収束する列とすれば, 局所凸空間の一般性質として, それは $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{m+n})$ の同等連続部分集合上で一様に0に収束する. とくに, $A'\otimes B'$ ($A'\subseteq\mathscr{S}'(\mathbf{R}^m)$, $B'\subseteq\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ は同等連続) は $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{m+n})$ の同等連続続集合だから, $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{m+n})$ は $\mathscr{S}(\mathbf{R}^m)\otimes\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上に ε よりも細かい位相を誘導する.

系. 定理51.6の記号を用いるとき, 次の標準的同形が成り立つ.

(51.7) $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^m)\hat{\otimes}\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)\cong L(\mathscr{S}(\mathbf{R}^m);\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n))\cong\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{m+n})$;

(51.8) $\mathscr{E}'(X)\hat{\otimes}\mathscr{E}'(Y)\cong L(\mathscr{C}^\infty(X);\mathscr{E}'(Y))\cong\mathscr{E}'(X\times Y)$;

(51.9) $H'(X)\hat{\otimes}H'(Y)\cong L(H(X);H'(Y))\cong H'(X\times Y)$.

証明 命題50.5を適用し, 定理51.6と(50.19)を組合せて用いればよい.

同形(51.7), (51.8), (51.9)は, L. Schwartz の**核定理** (Kernel theorem) の別形と見なすことができる. 核定理を述べて証明しょう.

定理 51.7. 次の標準的同形が成立する.

(51.10) $$\mathscr{D}'(X\times Y)\cong\mathscr{D}'(X)\hat{\otimes}\mathscr{D}'(Y)\cong L(\mathscr{C}_c^\infty(Y);\mathscr{D}'(X))$$
$$(X\subseteq\mathbf{R}^m,\ Y\subseteq\mathbf{R}^n:\text{開集合})$$

証明 二番目の同形は, 命題50.5の応用そのままである. $E=\mathscr{C}_c^\infty(Y)$, $F=\mathscr{D}'(X)$ とすれば, そこにおける諸条件は満たされている. 実際, E, F, F' は完備であり(定理13.1; 定理32.2の系3), E は樽型, E' は核型である. したがって, $E'\hat{\otimes}F\cong L_b(E;F)$.

残るところは, $\mathscr{D}'(X\times Y)$ がその稠密な(命題40.4)部分空間 $\mathscr{D}'(X)\otimes\mathscr{D}'(Y)$ 上に位相 $\varepsilon=\pi$ を誘導することの証明である. このためには, 標準的な

1) 定理34.1の系参照.

議論によって，$\mathcal{E}_c^\infty(X\times Y)$ の任意のコンパクト集合は，$\mathcal{E}_c^\infty(X)$ のコンパクト集合と $\mathcal{E}_c^\infty(Y)$ のコンパクト集合のテンソル積の閉凸平衡包に含まれることを示せば十分である．ところで，$\mathcal{E}_c^\infty(X\times Y)$ のコンパクトな（すなわち，閉有界な）部分集合は，部分空間 $\mathcal{E}_c^\infty(K\times L)$ (K, L はそれぞれ X, Y のコンパクト集合）に含まれ，そこでコンパクトである．したがって，われわれの主張は，同形対応 (51.5) と定理 45.2 の系 2 を組合せれば得られる．（証終）．

同形 (51.10) について，少し述べておこう．$X\times Y$ 上の任意の核超関数 $K(x, y)$ に対して，$\mathcal{E}_c^\infty(Y)$ から $\mathcal{D}'(X)$ への連続線形写像を，次のようにして，対応させることができる．$v\in\mathcal{E}_c^\infty(Y)$ に対して，X 上の超関数 Kv を

$$\mathcal{E}_c^\infty(X)\ni u\mapsto\langle K(x, y), u(x)v(y)\rangle$$

によって定義する．伝統的な記法に従えば

$$(Kv)(x)=\int K(x, y)v(y)\,dy$$

である．定理 51.7 は，対応 $K(x, y)\leftrightarrow K$ が同形対応になることを述べている．

写像 K の転置は

$$\mathcal{E}_c^\infty(X)\ni u\mapsto({}^tKu)(y)=\int K(x, y)u(x)\,dx$$

によってあたえられることに注意しょう．

核に関する次の用語は，一般的に用いられている．

(1)　核 $K(x, y)$ またはそれに附随する写像 K が，x に関して**半正則** (semi-regular) であることは，K が $\mathcal{E}_c^\infty(Y)$ を $\mathcal{E}^\infty(X)$ の中へ写すことを云う（このとき，K は連続線形写像 $\mathcal{E}_c^\infty(Y)\to\mathcal{E}^\infty(X)$ となる [1]）．x に関して半正則な核は，空間

$$\mathcal{E}^\infty(X)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{D}'(Y)\cong L(\mathcal{E}_c^\infty(Y)\,;\,\mathcal{E}^\infty(X))$$

の元である．ところで，定理 44.1 によれば

$$\mathcal{E}^\infty(X)\,\hat{\otimes}\,\mathcal{D}'(Y)\cong\mathcal{E}^\infty(X\,;\,\mathcal{D}'(Y))$$

1)　命題 13.1 と閉グラフ定理からわかる．

が成り立つ．かくして，x に関して半正則な核は，y に関する超関数の空間に値をもつような，x の $\mathcal{E}^\infty$ 関数と同一視することができる．

(2) $K(x, y)$ が y に関して半正則とは，それに付随する写像 K が $\mathcal{E}'(Y)$ から $\mathcal{D}'(X)$ への連続線形写像に拡張できることを云う．このとき，K の転置は $\mathcal{E}_c^\infty(X)$ を $\mathcal{E}^\infty(Y)$ の中へ連続的に写すことがわかる．換言するならば，核に関する (1) と同じ性質を，x と y (K と ${}^tK$) を取り替えて述べているわけである．したがって，y に関して半正則な核は，空間

$$\mathcal{D}'(X) \hat{\otimes} \mathcal{E}^\infty(Y) \cong L(\mathcal{E}_c^\infty(X)\,;\, \mathcal{E}^\infty(Y)) \cong \mathcal{E}^\infty(Y, \mathcal{D}'(X))$$

の元である．

(3) $K(x, y)$ が**正則化核** (regularizing kernel) であるとは，付随する写像 K が $\mathcal{E}'(Y)$ から $\mathcal{E}^\infty(X)$ への連続写像に拡張できるときに云う．換言するならば，

$$K(x, y) \in \mathcal{E}^\infty(X) \hat{\otimes} \mathcal{E}^\infty(Y) \cong \mathcal{E}^\infty(X \times Y)$$

となることを云う．

核 $K(x, y)$ が x と y の両方に関して半正則であっても，そのことから正則化核であることが従うと思ってはならない!．それは，$\mathcal{E}_c^\infty$ から $\mathcal{D}'$ への自然単射を見れば，直ちに明らかになる．実際，$X=Y=\Omega$ を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき，$\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{D}'(\Omega)$ への自然単射に対応する $\Omega \times \Omega$ 上の核超関数は，$\Omega \times \Omega$ の対角線上の "Dirac 測度" である．それは，つねに $\delta(x-y)$ で示される．x, y に関する超関数としては，これは

$$\langle \delta(x-y), \phi(x, y) \rangle = \int \phi(x, x)\,dx, \ \phi \in \mathcal{E}_c^\infty(\Omega \times \Omega)$$

によって定義される．ところで，$\delta(x-y)$ は "パラメーター" y に依存する x の超関数と見なすこともできる．そのときには，Ω_x 上の点 $y \in \Omega$ における Dirac 測度 $\delta_y(x)$ である．もちろん，$\delta(x-y)$ は x と y に関して対称である．核 $\delta(x-y)$ は x と y の両変数に関して半正則である．自然単射 $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ は，$\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ への連続線形写像である．換言すれば，

$$\delta(x-y) \in \{\mathscr{E}^\infty(\Omega_x) \hat{\otimes} \mathscr{D}'(\Omega_y)\} \cap \{\mathscr{D}'(\Omega_x) \hat{\otimes} \mathscr{E}^\infty(\Omega)_y\}$$

である．しかし，$\delta(x-y)$ は明らかに正則化核ではない．なぜなら，それは $\Omega\times\Omega$ 上の $\mathscr{E}^\infty$ 関数にならないからである．

さて，最後に，E を局所凸 Hausdorff 空間とし，完備であると仮定しょう．定理 44.1 と $\mathscr{E}^\infty(X)$ の核型性を用いれば，

$$\mathscr{E}^\infty(X\,;\,E) \cong \mathscr{E}^\infty(X) \hat{\otimes} E$$

を得る．同様にして (演習問題 44.6 参照)，

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n\,;\,E) \cong \mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes} E$$

を得る．ところで，開集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ で定義され，空間 E に値をもつ超関数 $\mathbf{T}$ は，$\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ から E への連続線形写像として定義するのが自然である．実際，$E=\mathbf{C}$ の場合にはそうなっている．E が有限のときには，ベクトル値超関数をどう定義するかという自然なアイディアになっている (一つの基底にをとるとき，各成分は複素数値超関数になるべきである)．換言すれば，X における E-値超関数は，定義によって

$$\mathscr{D}'(X\,;\,E) = L(\mathscr{E}_c^\infty(X)\,;\,E)$$

となる．この右辺の空間に有界収束の位相 (すなわち，$\mathscr{D}'(X)$ の双対と見なした $\mathscr{E}_c^\infty(X)$ の各同等連続集合上の一様収束の位相) は $\mathscr{D}'(X) \hat{\otimes} E$ と同一視できるから (命題 50.4 参照)，結局

$$\mathscr{D}'(X\,;\,E) \cong \mathscr{D}'(X) \hat{\otimes} E$$

を得る．このことは，緩増大超関数についても同様である．

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n\,;\,E) \cong \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes} E$$

Fréchet 空間 F の強双対を F' とするならば，(50.19) によって，

$$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n\,;\,F') \cong \mathscr{S}(\mathbf{R}^n\,;\,F)'$$

となることに注意しておこう．

$\mathscr{F}$ を Fourier 変換 $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ とし，I を E からそれ自身への恒等写像とするならば，$\mathscr{F} \hat{\otimes} I$ は $\mathscr{S} \hat{\otimes} E$ からそれ自身の中への同形写像である (命題 43.7)．

その像は稠密かつ完備だから，この写像は上への写像である．これによって，E-値緩増大超関数の Fourier 変換が定義される．

52.

応　　　用

この章では，核および位相テンソル積の理論の，線形偏微分方程式への若干の応用を述べる．この関連においては，核は微分作用素の逆作用素または逆作用素の近似の役割を演じる．われわれは，$\mathbf{R}^n$ の或る開集合 Ω 上で定義された微分作用素 D を取り扱う．微分作用素は，定義によって，係数はすべて $\mathcal{C}^\infty$ であったことを思い出そう[1]．積集合 $\Omega\times\Omega$ をとり扱う必要が生ずるが，積集合上の変数は (x, y) で表わす．$\Omega\times\Omega$ の**対角線** (diagonal) とは，$x=y$ となる点 (x, y) の集合である．作用素 D は Ω 上の超関数に作用する；D を $\Omega\times\Omega$ 上の超関数に作用させる場合には，どの変数について作用するのかを明らかにしなければならない．D が変数 x に関して作用するのならば，D よりはむしろ D_x と書く．このとき，作用素

$$D_x : \mathcal{D}'(\Omega_x\times\Omega_y) \to \mathcal{D}'(\Omega_x\times\Omega_y)$$

は，標準的同形 $\mathcal{D}'(\Omega_x\times\Omega_y)\cong\mathcal{D}'(\Omega_x)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{D}'(\Omega_y)$ を考慮するならば，拡張されたテンソル積写像 $D_x\,\widehat{\otimes}\,I_y$ に他ならない (I_y は $\mathcal{D}'(\Omega_y)$ の恒等写像)．さて，核および微分作用素に関する若干の用語を導入する．

定義 52.1. 核 $K(x, y)\in\mathcal{D}'(\Omega_x\times\Omega_y)$ が微分作用素 D_x の**基本核** (fundamental kernel) であるとは，

$$D_xK(x, y)-\delta(x-y)=0$$

1) 486 頁および上巻 303 頁参照.

となることを云う．また，核 $K(x, y)$ が D_x の**パラメトリックス** (parametrix) であるとは，

$$D_xK(x, y)-\delta(x-y) \in \mathcal{E}^\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$$

となるときに云う．

ここで，$\delta(x-y)$ は $\Omega_x \times \Omega_y$ の対角線上の "Dirac 測度" である (667 頁参照).

定義 52.2. 微分作用素 D が Ω において**準楕円型** (hypoelliptic) であるとは，u を Ω 上の超関数とするとき，Ω の任意の開部分集合 Ω' に対して，Du が Ω' 上で $\mathcal{E}^\infty$ 関数になるならば，u が Ω' において $\mathcal{E}^\infty$ 関数になることを云う．

準楕円型微分作用素は，微分作用素の重要な一つの類をなす．楕円型および放物型作用素は，これに属する（しかし，双曲型作用素[1] は，これに属さない）．準楕円型に関する下の陳述において，次の用語を使うことにする．核 $K(x, y)$ が**正則核** (regular kernel) であるとは，$K(x, y)$ が x に関しても y に関しても半正則なことを云う．$K(x, y)$ が**強正則核** (very regular kernel) であるとは，$K(x, y)$ が正則であって，さらに，それが対角線の補集合において，(x, y) の $\mathcal{E}^\infty$ 関数になることを云う

次の結果は，L. Schwartz に依る．

定理 52.1. D の転置 ${}^tD$ が強正則なパラメトリックスをもつとすれば，D は準楕円型である．このとき，D の核

$$N_D=\{u \in \mathcal{D}'(\Omega)\,;\ Du=0\} \subseteq \mathcal{E}^\infty(\Omega)$$

に $\mathcal{D}'(\Omega)$ および $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ から誘導した位相は一致し，$\mathcal{N}_D$ は Fréchet 空間となる．

以下の証明において，${}^tD$ は変数 y について作用するものとす．$K(x, y)$ を ${}^tD$ のパラメトリックスとすれば，${}^tD_yK(x, y)-\delta(x-y) \in \mathcal{E}^\infty(\Omega \times \Omega)$ である．

1) ただし，その階数 $\geqq 1$ とする．

定理 52.1 の証明 $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ として，Du は点 $a\in\Omega$ の或る近傍 ω において $\mathscr{C}^\infty$ 関数に等しいとする．$g\in\mathscr{C}_0^\infty(\omega)$ を点 a の或る近傍 ω' で 1 に等しい関数とし，$\rho\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ を原点 0 の或る近傍で 1 に等しい関数とする．さらに，$|x|>\varepsilon$ ならば $\rho(x)=0$ とする；$\varepsilon>0$ は後に決める．このとき，

$$w(x)=\int\rho(x-y)K(x,\ y)D_y[g(y)u(y)]\,dy$$

を考察しよう．この右辺が意味を持つためには，$K(x,\ y)$ が y について半正則，したがって，$\rho(x-y)K(x,\ y)$ が y について半正則[1] という仮定だけでよいことに注意すべきである．なぜなら，そのときには，核によって定義される写像は，$\mathscr{E}'(\Omega_y)$ ($D_y[g(y)u(y)]$ はこれに属する) から $\mathscr{D}'(\Omega_x)$ への連続線形写像に拡張されるからである．部分積分すれば[2]，

$$w(x)=\int {}^tD_y[\rho(x-y)K(x,\ y)]g(y)u(y)\,dy$$

を得る．ところで，$K(x,\ y)$ は $x\neq y$ のところでは $\mathscr{C}^\infty$ であり，0 の近くでは $\rho\equiv 1$ だから，

$$K_1(x,\ y)={}^tD_y[\rho(x-y)K(x,\ y)]-\rho(x-y){}^tD_yK(x,\ y)$$

は，$(x,\ y)$ の $\mathscr{C}^\infty$ 関数である．また，$K(x,\ y)$ は ${}^tD_y$ のパラメトリックスであり，$\rho(x-y)\delta(x-y)=\delta(x-y)$ であるから ($\rho(0)=1$ による)，

$$K_2(x,\ y)=\rho(x-y){}^tD_yK(x,\ y)-\delta(x-y)$$

もまた $\mathscr{C}^\infty$ 関数である．したがって，結局

$$w(x)-g(x)u(x)$$

は Ω 上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数である[3]．点 a の近くでは $g\equiv 1$ だから，残るところは，ε を適当にえらんだときに，w が a の近くで $\mathscr{C}^\infty$ になることを示すことである．ところで，a の近傍 ω' においては

---

1) $K(x,\ y)$ が y について半正則として，$f\in\mathscr{C}^\infty(\Omega\times\Omega)$ とするとき，$f(x,\ y)K(x,\ y)$ が y について半正則になることの証明は，読者の演習問題としよう．

2) むしろ，'超関数の導関数の定義にもどれば' と言うべきであろうが，それを '部分積分すれば' という表現を用いることが多い．

3) $g(x)u(x)=\int\delta(x-y)g(y)u(y)\,dy$ と書けばわかる．

$$D_y[g(y)u(y)]-g(y)u(y)=0$$

になることを考慮して，$\varepsilon>0$ を十分小さくとることによって，y の関数としての $\rho(x-y)$ の台が，$|x-a|<\varepsilon$ ならば ω' に含まれるようにする．このとき，これらの x に対しては

$$w(x)=\int\varphi(x-y)K(x,\ y)g(y)Du(y)\,dy$$

と書くことができる．仮定によって，$gDu\in\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ であり，$\rho(x-y)K(x,\ y)$ は x に関して半正則だから，$\mathcal{E}_c^\infty(\Omega_y)$ は $\mathcal{E}^\infty(\Omega_x)$ に写される．これで，D は準楕円型であることが証明された．

さて，$\mathcal{N}_D$ の元 u [の集合] からなるフィルターであって，$\mathcal{D}'(\Omega)$ において 0 に収束するものを考えよう．上の記号を用いるならば

$$w(x)-g(x)u(x)=\int[K_1(x,\ y)+K_2(x,\ y)]g(y)u(y)\,dy$$

と書くことができる．$K_j(x,\ y)\in\mathcal{E}^\infty(\Omega\times\Omega)$, $j=1,2$ であり，gu は $\mathcal{E}'(\Omega)$ において 0 に収束するから，$w-gu$ は $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において 0 に収束する．そこで，$\varepsilon>0$ を十分小さくとって，$|x-a|<\varepsilon$ ならば $w(x)=0$ となるようにする．そうすれば

$$\omega''=\{x\,;\,|x-a|<\varepsilon\}$$

において $gu=u$ であり，u は $\mathcal{E}^\infty(\omega'')$ において 0 に収束する．点 a は任意であったから，u は $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において 0 に収束することが結論される．(証終)．

$K(x,\ y)\in\mathcal{D}'(\Omega\times\Omega)$ として，$K(x,\ y)$ によって定義される写像 $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)\to\mathcal{D}'(\Omega)$ を K で表わす．$K(x,\ y)$ が微分作用素 D の**両側基本核** (two-sided fundamental kernel) であるとは，すべての $\phi\in\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ について

$$KD\phi=DK\phi=\phi$$

が成りたつことを云う．容易にわかるように，$K(x,\ y)$ が両側基本核であるための必要十分条件は

$$D_xK(x,\ y)=\delta(x-y),\qquad {}^tD_yK(x,\ y)=\delta(x-y)$$

が成りたつことである．

定理 52.2. D を Ω における準楕円型微分作用素とすれば，Ω の任意の点の［適当な］開近傍において，${}^tD$ は基本核をもつ．さらに ${}^tD$ も準楕円型であれば，Ω の任意の点の［適当な］開近傍において，D は強正則両側基本核をもつ．

証　明　空間 H^s (定義 31.4 参照) とそのノルム $\| \ \|_s$ (406 頁) を導入して考える．K を Ω の任意のコンパクト集合とし，s と t を実数とする．$\Phi^s(K)$ によって，空間 $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ にセミノルムの族

$$\phi \mapsto \|D\phi\|_t + \|\phi\|_s$$

で定義される位相 (t はすべての実数を動くとする；これは，t がすべての正整数を動くと云っても同値である) を入れたものを表わす．$\Phi^s(K)$ は距離付け可能な空間である．その完備化 $\hat{\Phi}^s(K)$ は H^s の部分空間と同一視することができるから[1]，したがって，$\mathcal{D}'(\Omega)$ の部分空間と考えることができる．しかしながら，写像 $u \mapsto Du$ は $\Phi^s(K)$ から $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ への連続線形写像だから，$\hat{\Phi}^s(K)$ に属する超関数は，すべて $\mathcal{C}^\infty$ 関数でなければならない[2]．それらの超関数の台は明らかにすべて K に含まれるから，$\hat{\Phi}^s(K) = \Phi^s(K) = \mathcal{C}_c^\infty(K)$ が成りたつ．恒等写像 $\mathcal{C}_c^\infty(K) \to \Phi^s(K)$ は連続だから，開写像定理によって，それは同形写像である．かくして，結局，次のことがわかる：任意の実数 r に対して，実数 t と定数 $C(r, s)$ が存在して，すべての $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$ について

$$\|\phi\|_r \leqslant C(r, s)(\|D\phi\|_t + \|\phi\|_s) \tag{52.1}$$

が成り立つ．この不等式において，$r=1$，$s=0$ とおいて，次の事実を利用する (その証明は読者にまかせる[3])．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\eta > 0$ が存在して，もし $\mathrm{diam}\,(\mathrm{supp}\,\phi) < \eta$ ならば

$$\|\phi\|_0 \leqslant \varepsilon \|\phi\|_1$$

が成り立つ．そこで，Ω の任意の点 x^0 の任意の相対コンパクト開近傍の閉包 K に対して，評価式 (52.1) を適用する．このとき，x^0 の開近傍 $U \subseteq \Omega'$ が存

1)　自然単射 $j : \Phi^s(K) \to H^s$ を連続性によって拡張した写像 $\hat{j} : \hat{\Phi}^s(K) \to H_s$ が単射になることを証明すればよい．それには，$\Phi^s(K)$ における Cauchy 列 $\{f_n\}$ が，H^s において 0 に収束するときには，$\Phi^s(K)$ においても 0 に収束することを言えばよい．これは読者の演習としよう．

2)　ここで，D の準楕円性を用いた．

3)　関数をその導関数の積分によって表わし，それに Schwarz の不等式を適用せよ．

在して，すべての $\phi \in \mathscr{C}_0^\infty(U)$ について

$$\|\phi\|_1 \leqslant \text{定数} \times \|D\phi\|_t$$

が成りたつことは明らかである[1]．結局，もし必要ならば t を大きくとることによって，定数 $C' > 0$ が存在して

$$\|\phi\|_{-t} \leqslant C'\|D\phi\|_t \quad (\text{すべての } \phi \in \mathscr{C}_c^\infty(U) \text{ について}) \tag{52.2}$$

が成りたつ．さらに ${}^tD$ も準楕円型ならば，t, C' をもっと大きくとり，必要ならば，U を縮めることによって，

$$\|\phi\|_{-t} \leqslant C'\|{}^tD\phi\|_t \quad (\text{すべての } \phi \in \mathscr{C}_c^\infty(U) \text{ について}) \tag{52.3}$$

も成り立つ．

さて，$D\phi, \phi \in \mathscr{C}_c^\infty(U)$ の形の超関数の集合の H^t における閉包を M として，H^t から M の上への正射影を p_M とする．評価式 (52.2) によって，写像 $D\phi \mapsto \phi$ は M (H^t のノルムを入れたもの) から H^{-t} への連続線形写像に拡張することができる．M の直交補空間においては 0 とおくことにより，それは，さらに，連続線形写像 $G : H^t \to H^{-t}$ にまで拡張することができる．このとき，G の転置 ${}^tG$ は，H^t から H^{-t} への連続線形写像であって，すべての $f \in H^t$ について，U において

$${}^tD({}^tGf) = f$$

が成立する[2]．$\mathscr{C}_c^\infty(U)$ は H^t に連続的に埋め込まれているから，${}^tG$ は $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ から H^{-t} への連続線形写像を定め，したがって，もちろん $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathscr{D}'(\Omega)$ への連続線形写像を定める．この写像に付随する核が，${}^tD$ の (U における) 基本核である．これで，定理の前半が証明された．

もし ${}^tD$ し準楕円型ならば，(52.3) から連続線形作用素 $\Gamma : H^t \to H^{-t}$ が存在して，すべての $f \in H^t$ に対して，$D(\Gamma f) = f$ が U において成りたつことが導かれる[3]．そこで

---

1) $C = C(1, 0)$ として，(52.1) と $\|\phi\|_0 \leqslant \varepsilon\|\phi\|_1$ を用いれば，diam U を小さくとることにより，$0 < \varepsilon < 1/C$ として，$\|\phi\|_1 \leqslant C(1-\varepsilon C)^{-1}\|D\phi\|_t$ を得る．

2) 転置写像の定義によって，とくに $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(U)$ について $\langle D\phi, {}^tGf\rangle = \langle\phi, f\rangle$ を得るから，超関数として，${}^tD({}^tGf) = f$ を得る．

3) 写像 $\mathscr{C}_c^\infty(U) \ni {}^tD\phi \mapsto \phi \in H^{-t}$ を，前と同様にして，連続線形写像に拡張したものの転置を Γ とすれば，$\langle {}^tD\phi, \Gamma f\rangle = \langle\phi, f\rangle$ から，$D\Gamma f = f$ を得る．

$$E = Gp_M + \Gamma(1-p_M)$$

とおく．ただし，I は H^t の恒等写像である．そうすれば，E は $H^t \to H^{-t}$ の有界作用素であり，すべての $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ について $p_M D\phi = D\phi$ だから，$E(D\phi) = GD\phi = \phi$ を得る．他方，U において

$$D(E\phi) = DG(p_M\phi) + (I-p_M)\phi$$

が成りたつ．そこで，$\mathcal{C}_c^\infty(U)$ における点列 $\{\phi_k\}$ を，H^t において $D\phi_k \to p_M\phi$ となるようにとる．G は連続だから，$\phi_k = GD\phi_k$ は H^{-t} において $G(p_M\phi)$ に収束する．したがって，$D\phi_k$ は $\mathcal{D}'$ において $DG(p_M\phi)$ に収束する．しかし，$D\phi_k$ は $p_M\phi$ にも収束するから，$p_M\phi = DG(p_M\phi)$ を得る．したがって，結局，U において $D(E\phi) = \phi$ を得る．これで，連続線形作用素 $\phi \mapsto E\phi|U$ ($E\phi$ の U への制限) に付随する核 $K(x, y)$ が，D の両側基本核になることが証明された．この K が強正則になることは，次の補題から出る．

補題 52.1. D と ${}^tD$ が共に Ω において準楕円型であるとすれば，Ω における D の両側基本核は，すべて強正則である．

証　明　任意の $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して

$$D_x \int K(x, y)\phi(y)\,dy = \phi(x)$$

が成り立つが，D は準楕円型だから，$\int K(x, y)\phi(y)\,dy \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_x)$ でなければならない．すなわち，$K : \phi(y) \mapsto \int K(x, y)\phi(y)\,dy$ は $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ を $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の中へ写すが，このとき，この写像のグラフは閉である．なぜなら，K は値を $\mathcal{D}'(\Omega)$ にとると考えたとき連続だからである．したがって，$K : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ が連続になることが結論される．これは，$K(x, y)$ が x に関して半正則であることを意味している．x と y を入れかえ，D と ${}^tD$ を入れかえて考えれば，$K(x, y)$ は y に関しても半正則となる．かくして，$K(x, y)$ は正則である．残るところは，$K(x, y)$ が，$\Omega \times \Omega$ の対角線の補集合において，(x, y) の $\mathcal{C}^\infty$ 関数になることの証明である．

U, V を Ω の二つの開部分集合で，$U\cap V=\phi$ となるものとする[1]．今後は，$K(x,y)$ によって，いままでの $K(x,y)$ を $U\times V$ へ制限したものを表わすことにする．さて，上に証明したことによって

$$K(x,y)\in\mathcal{E}^\infty(V_y;\mathcal{D}(U_x))\cong\mathcal{D}'(U_x)\hat{\otimes}\mathcal{E}^\infty(V_y)$$

ところで，任意の n-系 q に対して

$$D_x[(\partial/\partial y)^q K(x,y)]=0$$

が $U\times V$ において成り立つ[2]．いま，V の任意の点 y^0 のコンパクトな近傍を H とすれば，V から $\mathcal{D}'(\Omega)$ への写像 $y\mapsto(\partial/\partial y)^q K(x,y)$ は連続だから，この写像による H の像 $\mathcal{H}$ は，$\mathcal{D}'(U)$ のコンパクト集合となる．U' を U の任意の相対コンパクト開部分集合として，$\mathcal{H}$ の元の U' への制限からなる集合を $\mathcal{H}|U'$ と書く．このとき $\mathcal{H}|U'$ は或る空間 $H^s_{\mathrm{loc}}(U')$ (31 章，410 頁参照) に含まれ，そこにおいてコンパクトであるがわかる (定理 34.3, 443 頁参照)．ところで，$\mathcal{H}|U'$ は U' における斉次方程式 $Du=0$ の解の空間 $\mathcal{N}_D(U')$ にも含まれている．D は準楕円型であったから，$\mathcal{N}_D(U')\subseteq\mathcal{E}^\infty(U')$ であり，$\mathcal{N}_D(U')$ は Fréchet 空間 $\mathcal{E}^\infty(U')$ と $H^s_{\mathrm{loc}}(U')$ の両方において閉である．したがって，これらの空間は，$\mathcal{N}_D(U')$ に同じ位相を誘導する．かくして，$y\mapsto(\partial/\partial y)^q K(x,y)$ は H から $\mathcal{E}^\infty(U)$ への連続写像となるが，y^0 は任意だったから，それは V から $\mathcal{E}^\infty(U)$ への連続写像である，n-系 q は任意であったから，$K(x,y)$ は $U\times V$ における (x,y) の $\mathcal{E}^\infty$ 関数になることが結論される．

系 1. 次の二つの条件は同値である．

(a)　D と ${}^tD$ は共に Ω において準楕円型である．

(b)　Ω の各点に対して，その開近傍が存在して，そこにおいて D は強正則な両側基本核をもつ．

これらの条件が満たされるとき，$\mathcal{D}'(\Omega)$ および $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{N}_D$ 上に誘導され

1)　$\Omega\times\Omega$ において，対角線に属さない任意の点は，(このような U, V を用いて) $U\times V$ に含まれる．

2)　$K(x,y)$ が基本核であることと，$U\times V$ が対角線と交わらないことから，$U\times V$ では $D_xK(x,y)=0$ である．ところで，$(\partial/\partial y)^q$ と D_x は可換だから，この式を得る．

る位相は一致し，それによって $\mathcal{N}_D$ は Fréchet 空間となる．

これには，空理 52.1 と 52.2 を組合せればよい．

よく知られているように，調和関数あるいは正則関数に対しては，関数の各コンパクト集合上の一様収束 [の位相] と関数およびそのすべての各階導関数の各コンパクト集合上での一様収束 [の位相] は，同一のものである．Laplace 作用素と Cauchy-Riemann 作用素は準楕円型であるが[1]，それを認めるならば，定理 52.2 の系 1 は，この収束に関する性質を一般化し，精密化するものである．

系 2. 定理 52.2 と同じ仮定をおき，K の Ω のコンパクト集合とする．このとき，斉次方程式 $Du=0$ の (超関数) 解であって，その台が K に含まれるものからなる線形空間 $\mathcal{N}_D(K)$ は，有限次元である．

証明 E を Ω 上の超関数からなる一つの Banach 空間であって，$\mathcal{C}_c^\infty(K)$ を含み，その $\mathcal{C}_c^\infty(K)$ への誘導位相は $\mathcal{D}'(\Omega)$ からのものよりも細かいとする[2] (たとえば，$E=L^2(\Omega)$)．定理 52.1 の系から，E から $\mathcal{N}_D(K)\subseteq\mathcal{C}_c^\infty(K)$ への誘導位相は，$\mathcal{D}'(\Omega)$ のものと同じになることが導かれる．ところで，E から誘導されたノルムによる $\mathcal{N}_D(K)$ の単位球は，$\mathcal{D}'(\Omega)$ において有界であり，したがって，プレコンパクトである．したがって，この系を得る．

適当な条件のもとに，大域的な両側基本核の存在を主張する B. Malgrange による次の定理を，今までの結果を用いて証明しよう．

定理 52.3. D を Ω 上の微分作用素として，${}^tD$ をその転置とする．D と ${}^tD$ は共に準楕円型であって，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ をそれ自身の上へ写すと仮定する．このとき，D は Ω において強正則両側基本核をもつ．

証明 F を Fréchet 空間として，次の二つの等式を証明することから始

1) それらの転置も準楕円型である．

2) もっと正確には，自然単射 $\mathcal{C}_c^\infty(K)\to E\to\mathcal{D}'(\Omega)$ が共に連続とする．

めよう．

$$(52.4)\qquad (D\hat{\otimes} I)(\mathcal{E}^\infty(\Omega)\hat{\otimes} F)=\mathcal{E}^\infty(\Omega)\hat{\otimes} F$$

$$(52.5)\qquad (D\hat{\otimes} I)(\mathcal{D}'(\Omega)\hat{\otimes} F)=\mathcal{D}'(\Omega)\hat{\otimes} F$$

ここで，I は F の恒等写像である．等式 (52.4) は，命題 43.9 と $D\mathcal{E}^\infty(\Omega)=\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ ということからの自明な結果であり，その意味では準楕円性とは関係がない (定理 52.5 参照).

等式 (52.5) の証明に進もう．D, ${}^tD$ は共に準楕円型だから，定理 52.5 を適用することができる．したがって，Ω の開被覆 $\{U_i\}$ が存在して，各 U_i において，D は強正則両側基本核をもつ．被覆 $\{U_i\}$ は，相対コンパクトな開集合からなる局所有限な被覆であると仮定してよい．そこで，$\{V_i\}$ を Ω のもう一つの局所有限被覆であって，各 i について $\bar{V}_i\subseteq U_i$ となるものとし，$\{g_i\}$ を $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ における 1 の分割で，被覆 $\{V_i\}$ に従属するものとする．各 i について，$h_i\in C_c^\infty(U_i)$ を V_i 上で 1 に等しい関数とする．h_i の乗法による $\mathcal{D}'(\Omega)$ における写像 $S\mapsto h_iS$ から，拡張されたテンソル積写像

$$h_i\hat{\otimes} I:\mathcal{D}'(\Omega)\hat{\otimes} F\to\mathcal{E}'(U_i)\hat{\otimes} F$$

を得るが，$\mathbf{S}\in\mathcal{D}'(\Omega)\hat{\otimes} F$ に対して，$(h_i\hat{\otimes} I)\mathbf{S}$ と書く代りに $h_i\mathbf{S}$ と書くことにしよう．他方，U_i における D の (強正則な) 両側基本核を K_i として，写像

$$K_i\hat{\otimes} I:\mathcal{E}'(U_i)\hat{\otimes} F\to\mathcal{D}'(U_i)\hat{\otimes} F$$

を考えれば，すべての $\mu\in\mathcal{E}'(U_i)\hat{\otimes} F$ について

$$(D\hat{\otimes} I)(K_i\hat{\otimes} I)\mu=\mu$$

を得る．そこで，$\mathbf{S}$ を $\mathcal{D}'(\Omega)\hat{\otimes} F$ の任意の元として，

$$\mathbf{T}_i=(K_i\hat{\otimes} I)(h_i\mathbf{S})$$

とおく．$\mathbf{T}_i-\mathbf{T}_j$ の $V_{ij}=V_i\cap V_j$ への制限は，$\mathcal{D}'(V_{ij})\hat{\otimes} F$ に属し，そこでは

$$(D\hat{\otimes} I)(\mathbf{T}_i-\mathbf{T}_j)=(h_i-h_j)\mathbf{S}=0$$

を満たすことに注意しよう．さて，$\mathcal{D}'$ の核型性を用いて

$$\mathcal{D}'(V_{ij})\hat{\otimes} F\cong L_\varepsilon(F_\tau';\mathcal{D}'(V_{ij}))$$

であることを思い出そう．ところで，上に見たように，$\mathbf{T}_i-\mathbf{T}_j$ は，F' から

$\mathcal{D}'(V_{ij})$ への写像と見るとき，その値を方程式 $Du=0$ の超関数解の空間 $\mathcal{N}_D(V_{ij})$ にとる．定理52.2の系1によって，$\mathcal{N}_D(V_{ij})$ 上に $\mathcal{D}'(V_{ij})$ から誘導される位相は，$\mathcal{E}^\infty(V_{ij})$ からのものと同じになる．したがって

$$\mathbf{T}_i-\mathbf{T}_j \in L_\varepsilon(F_\tau'\,;\, \mathcal{E}^\infty(V_{ij})) \cong \mathcal{E}^\infty(V_{ij}) \hat{\otimes} F \tag{52.6}$$

を得る．そこで

$$\mathbf{T}=\sum_j g_j\mathbf{T}_j$$

とおけば，V_i においては

$$\mathbf{S}-(D\hat{\otimes} I)\mathbf{T}=(D\hat{\otimes} I)\mathbf{T}_i-(D\hat{\otimes} I)\mathbf{T}=(D\hat{\otimes} I)\Bigl(\sum_j g_j(\mathbf{T}_i-\mathbf{T}_j)\Bigr)$$

となるが，(52.6) によって，[最後の和の] 各項 $g_j(\mathbf{T}_i-\mathbf{T}_j)$ は $\mathcal{E}^\infty(\Omega)\hat{\otimes} F$ に属する．$\{V_i\}$ は Ω の被覆だから，

$$\mathbf{S}-(D\hat{\otimes} I)\mathbf{T}\in \mathcal{E}^\infty(\Omega)\hat{\otimes} F$$

を得る．(52.4) によれば，$\boldsymbol{\phi}\in \mathcal{E}^\infty(\Omega)\hat{\otimes} F$ が存在して，$(D\hat{\otimes} I)\boldsymbol{\phi}=\mathbf{S}-(D\hat{\otimes} I)\mathbf{T}$ となるから，

$$(D\hat{\otimes} I)(\mathbf{T}+\boldsymbol{\phi})=\mathbf{S}$$

を得る．これで，(52.5) が証明された．

さて，$F=\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ として，(52.5) を適用しよう．$\delta(x-y)\in \mathcal{D}'(\Omega_x)\hat{\otimes}\mathcal{E}^\infty(\Omega_y)$ だから，(52.5) によって，同じ完備テンソル積に属する核 $K_1(x,y)$ が存在して，$(D_x\hat{\otimes} I)K_1(x,y)=\delta(x-y)$ となる．すなわち，$D_xK_1=I_{x,y}$ を得る (I_x, I_y によって $\mathcal{D}'(\Omega_x)$, $\mathcal{D}'(\Omega_y)$ の恒等写像を表わし，$I_{x,y}$ によって恒等写像 $\mathcal{D}'(\Omega_y)\to\mathcal{D}'(\Omega_x)$ を表わす[1])．そこで

$$L=I_{x,y}-(I_x\hat{\otimes}{}^tD_y)K_1\in \mathcal{D}'(\Omega_x)\hat{\otimes}\mathcal{D}'(\Omega_y)$$

とおけば

$$\begin{aligned}(D_x\hat{\otimes} I_y)L&=(D_x\hat{\otimes} I_y)I_{x,y}-(I_x\hat{\otimes}{}^tD_y)(D_x\hat{\otimes} I_y)K_1\\&=(D_x\hat{\otimes} I_y-I_x\hat{\otimes}{}^tD_y)I_{x,y}=0\end{aligned}$$

1) $\Omega_x=\Omega_y=\Omega$ だから，これは意味をもつが，$I_{x,y}$ よりは $\delta(x-y)$ の方がわかりやすいかも知れぬ．

を得る（${}^tD$の定義による）．かくして，Lは$\mathcal{E}_c^\infty(\Omega_y)$から$\mathcal{N}_D(\Omega_x)=\{u\in\mathcal{D}'(\Omega_x);\ Du=0\}$への線形写像を定義し，後者の空間に$\mathcal{D}'(\Omega_x)$からの誘導位相を入れたとき，連続となる．この位相によって，$\mathcal{N}_D(\Omega_x)$は Fréchet 空間となる（定理 52.5 の系 1）したがって，(52.5) において$F=\mathcal{N}_D(\Omega_x)$として，$D$の代りに${}^tD$として適用するならば[1]，$K_2\in\mathcal{N}_D(\Omega_x)\widehat{\otimes}\mathcal{D}'(\Omega_y)$（ゆえに$(D_x\widehat{\otimes}I_y)K_2=0$）が存在して，$(I_x\widehat{\otimes}{}^tD_y)K_2=L$となることがわかる．このとき，$K=K_1+K_2$とおくならば

$$(I_x\widehat{\otimes}{}^tD_y)K=I_{x,y},\qquad (D_x\widehat{\otimes}I_y)K=I_{x,y}$$

を得る[2]．これはちょうど，KがDの両側基本核であることを意味している．補題 52.1 により，Kは強正則である．（証終）．

E, Fを二つの Hausdorff TVS として，$u:E\to F$を上への準同形写像としよう．このとき，uが**連続右逆写像** (continuous right inverse) をもつとは，連続線形写像$v:F\to E$が存在して，$u\circ v=F$の恒等写像となることを云う．Eの線形部分空間Mが**位相的補空間** (topological supplomentary) をもつとは，Eにもう一つの線形部分空間Nが存在して，$M\times N$からEへの写像$(x_1,x_2)\mapsto x_1+x_2$が上への同形写像になることを云うのであった（同形は TVS 構造に関するものである；M, Nには誘導位相を入れ，$M\times N$にはその積 TVS 構造を入れて考える）ことを思い出そう．そうすれば，《uが連続右逆写像をもつための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\,u$が位相的補空間をもつことである》ということを見るのは容易である．実際，vをuの連続右逆写像とすれば，$v(F)$は$\mathrm{Ker}\,u$の位相的補空間である．逆にMが$\mathrm{Ker}\,u$の位相的補空間ならば，uのMへの制限はMからFの上への同形写像であり，その逆写像がuの連続右逆写像となる．

A. Grothendieck による次の定理の示すところによれば，微分作用素の重要な一類（解析的な係数をもつ“ほとんどの”楕円型作用素を含む）に属する作

1) xとyを入れかえて．

2) 前頁脚注 2) 参照．

用素は，$\mathcal{E}^\infty$ をそれ自身の上に写すにもかかわらず，連続右逆作用素をもたない．上述のことによれば，このことから，それらの写像の核は位相的補空間をもたないことがわかる．この一類の作用素は，定数係数の楕円型作用素をすべて含み，とくに Laplace 作用素および Cauchy-Riemann 作用素を含む．したがって，$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の調和関数の空間や，$\mathbf{C}^1$ の開集合 Ω 上の正則関数の空間は，$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において位相的補空間をもたないことがわかる．

定理 52.4. D を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の微分作用素とし，次の諸性質をもつものとする．

（I） Ω' を Ω の任意ので部分集合，S を Ω 上の任意の超関数とするとき，Ω' において，$DS=0$ ならば S は Ω' において解析的関数[1] となる．

（II） D は $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ をそれ自身の上に写す．

（III） 任意の開集合 $\Omega' \subseteq \Omega$ に対して，その開部分集合 $\Omega'' \subseteq \Omega'$ が存在して，ある $T \in \mathcal{D}'(\Omega'')$，$T \neq 0$ に対して ${}^tDT=0$ となる．

これらの条件の下に[2]，D は $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において連続右逆写像をもたない．

証　明　矛盾によって証明する．D は $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において連続右逆写像 G をもつと仮定する．そうすれば，Ω の任意のコンパクト集合 K に対して，Ω のコンパクト集合 K'，整数 $m \geqslant 0$，定数 $C>0$ が存在して，すべての $\phi \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ について

$$\sup_{x\in K}|G\phi(x)| \leqslant C \sup_{x\in K'} \sum_{|p|\leqslant m} |(\partial/\partial x)^p \phi(x)|$$

が成り立つ．いま，ϕ が K' の近傍で 0 になるとすれば，$G\phi$ は K において 0 とならねばならない．K はその内部 $\mathcal{O}$ が空でないようにえらんでおく．Ω_0 を，$K \cup K'$ の補集合と Ω の連結成分のうちで $\mathcal{O}$ と交わるものの一つ Ω_1 との共通

---

1) 解析的 (analytic) とは，'実解析的 (real analytic)' の意味で言う．すなわち，その関数の各点における Taylor 展開がその点のある近傍でその関数に収束することを言う．

2) さらに空間の次元 n に対して，$n \geqslant 2$ とする．$n=1$ ならば，**反例**，$\Omega=(-1,1)$，$D=\dfrac{d}{dx}$ がある．$G:\mathcal{E}^\infty(\Omega) \ni \phi \mapsto \int_0^x \phi(\tau)\,d\tau \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ が D 連続右逆写像．

部分に含まれる開球とする．任意の $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0)$ に対して，$G\phi=0$ が K で成り立つから，$\mathcal{O}$ においても成り立つ．他方，$\mathrm{supp}\phi$ の補集合においては $DG\phi=0$ だから，$G\phi$ はこの補集合において解析的である(条件(I)による)．このことから，$\Omega_1-\mathrm{supp}\phi$ の連結成分のうちで $\mathcal{O}$ と交わるものの上では，$G\phi=0$ となることが導かれる[1]．すなわち，$\Omega_1-\mathrm{supp}\phi$ の相対コンパクトでないすべての連結成分において，$G\phi=0$ を得る[2](相対コンパクト性は Ω_1 に関して云う)．このことから直ちに，$\Omega_1 \cap \mathrm{supp}\phi$ は Ω_0 のコンパクト部分集合になることがわかる．したがって，$DG\phi=\phi$ を用いて，$D\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0)=\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0)$ となることがわかる．したがって，${}^tD: \mathcal{D}'(\Omega_0)\to\mathcal{D}'(\Omega_0)$ は1対1である．ところで，全く同じ議論が Ω_0 に含まれれる任意の開球に対して適用できるから，(条件 III によって) Ω_0 自身が一つの開集合 Ω'' に含まれ，方程式 ${}^tDT=0$ には解 $T\in\mathcal{D}'(\Omega'')$ が存在して，その Ω_0 への制限が0でないと仮定してよい．これで，矛盾に出会ったことになる．

注意 52.1. 解析的な係数をもつ楕円型作用素は，条件(I)および(III)を満たす．D をそのような作用素とすれば，その転置 ${}^tD$ もまた楕円型である(係数は解析的)．いま，K を Ω の任意のコンパクト集合として，K と $\Omega-K$ のすべての相対コンパクトな連結成分の合併集合を $\widehat{K}$ とする．$\widehat{K}$ は明らかに Ω のコンパクト集合である．このとき，もし ${}^tD$ が定理52.4の性質(I)をもつとすれば，任意の $\mu\in\mathcal{E}'(\Omega)$ に対して $\mathrm{supp}\,{}^tD\mu\subseteq K$ から $\mathrm{supp}\,\mu\subseteq\widehat{K}$ が出る[3]．かくして，Ω は D-凸(定義38.1)となる．したがって，性質(II)が成り立つことを示すには，D が半大域的に可解(定義38.2)であることを示せば十分である(定理38.2による)．ところで，定数係数の作用素はすべて半大域的に可解である(演習問題38.1)．かくして，定数係数の楕円型作用素は，すべて定理52.4の条件(I), (II), (III)を満たすことがわかる(Ω はどんな開集合でもよい)．

---

1) 解析的関数の一意接続性による．

2) このためには，$n\geqslant 2$ が必要(すなわち，連結開集合から小さな球を除いた残りが連結であるための条件)．前頁脚注2)参照．

3) ここでも，$n\geqslant 2$ の仮定が必要．

さて，E を核型 Fréchet 空間とし，$u:E\to E$ を E からそれ自身の上への準同形写像としよう．u は連続右逆写像 v をもつと仮定する．v を $E'\hat{\otimes}E$ の元と同一視して ((50.18) による)，それを θ_v とする．$\theta_I\in E'\hat{\otimes}E$ を E の恒等写像 I に対応する元としよう．v が u の連続右逆写像であるということは，等式

$$(I'\hat{\otimes}u)(\theta_v)=\theta_I$$

と同値である．(I' は E' の恒等写像)[1]．このようにして，もし u が連続右逆写像をもたなければ，$I'\hat{\otimes}u$ は $E'\hat{\otimes}E$ をそれ自身の上には写さないことがわかる．——I' と u は共に上への写像であるにもかかわらず，とくに，定理 52.4 は，上への写像のテンソル積を ($\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ と $\mathscr{E}'(\Omega)$ の) 完備テンソル積の写像に拡張したものが，上への写像にならない例をあたえている．このことから，命題 43.9 における距離付け可能性の制限が，簡単には除けないことがわかる．

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の微分作用素 D を考える．E を完備な局所凸 Hausdorff 空間とすれば，D を E に値をもつ関数に作用させることができる．実際，D を E に値をもつ超関数に作用させることができる；後者は $\mathscr{D}'(\Omega)\hat{\otimes}E$ の元と考える．このとき，$\mathbf{T}\in\mathscr{D}'(\Omega)\hat{\otimes}E\cong L(\mathscr{C}_c^\infty(\Omega);E)$ (命題 50.5) に対して，D_xT を写像 $D_x\hat{\otimes}I$ を $\mathbf{T}$ に施したものとして定義する (I は E の恒等写像)．$\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ とするとき，

$$(D_x\mathbf{T})(\phi)=\mathbf{T}({}^tD\phi)$$

が成り立つことに注意しよう．$\mathbf{f}$ を E に値をもつ十分滑らかな関数，たとえば $\mathbf{f}\in\mathscr{C}^\infty(\Omega;E)$ とすれば，$D\mathbf{f}$ を直接に定義することができる．云うまでもないが，この二つの定義は一致する．なぜなら

$$\mathscr{C}^\infty(\Omega;E)\cong\mathscr{C}^\infty(\Omega)\hat{\otimes}E\cong L(\mathscr{E}'(\Omega);E)$$

は $\mathscr{D}'(\Omega)\hat{\otimes}E$ の部分空間と標準的に同一視できるからである．次の結果は，命題 43.9 から直ちに得られる．

---

1) $E'\hat{\otimes}E$ の元を写像と考えて，u を左から合成するには，$I'\hat{\otimes}u$ を (右から合成するには，${}^tu\otimes I$ を) 施せばよい．これは，まず $E'\otimes E$ の元について確かめ，完備化 $E'\hat{\otimes}E$ の一般の元については，連続性を用いて，極限にゆけばよい．

定理 52.5. $D\mathcal{E}^\infty(\Omega)=\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ とすれば，任意の Fréchet 空間 E に対して，$D\mathcal{E}^\infty(\Omega\,;\,E)=\mathcal{E}^\infty(\Omega\,;\,E)$ となる．

次に，Ω 上の次の形の微分作用素を考察しよう．

$$P(x,\,y,\,\partial/\partial x)=\sum_{|p|\leq m}a_p(x,\,y)(\partial/\partial x)^p$$

ここで，y はユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ の開集合 Y の中を動く変数とし，係数 $a_p(x,\,y)$ は $\Omega\times Y$ における $\mathcal{E}^\infty$ 関数とする．

定理 52.6. 任意の関数 $f\in\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ に対して，関数 $u\in\mathcal{E}^\infty(\Omega\times Y)$ が存在して $P(x,\,y,\,\partial/\partial x)u(x,\,y)=f(x)$ となると仮定する．$F(Y)$ を Y 上の超関数からなる一つの Fréchet 空間[1] で，すべての $\psi\in\mathcal{E}^\infty(Y)$ と $g\in F(Y)$ に対して $\psi g\in F(Y)$ となる性質をもつものとする．このとき，

$$P(x,\,y,\,\partial/\partial x)\mathcal{E}^\infty(\Omega\,;\,F(Y))=\mathcal{E}^\infty(\Omega\,;\,F(Y))$$

が成り立つ．

証　明　次の事実を利用する

$$\mathcal{E}^\infty(\Omega\,;\,F(Y))\cong\mathcal{E}^\infty(\Omega)\,\widehat{\otimes}\,F(Y)$$

そうして，定理 45.1 を適用する：$\mathcal{E}^\infty(\Omega\,;\,F(Y))$ の任意の元 f は，級数

$$f(x,\,y)=\sum_k\lambda_k f_k(x)g_k(y)$$

の形に書くことができる．ここで，$\{\lambda_k\}\in l^1$ であり，$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において $f_k\to0$，$F(Y)$ において $g_k\to0$ である．$\mathcal{E}^\infty(\Omega\times Y)$ の元 $u(x,\,y)$ のうちで，$P(x,\,y,\,\partial/\partial x)u(x,\,y)\in\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ となるもの，すなわち，y に従属しないもの全体からなる線形部分空間を G で表わすことにする．明らかに，G は $\mathcal{E}^\infty(\Omega\times Y)$ の閉線形部分空間となる．すなわち，誘導位相によって Fréchet 空間となる．仮定によって，$P(x,\,y,\,\partial/\partial x)$ を G に制限したものは，G から $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ の上への連続線形写像となる．したがって，それは上への準同形写像である．そこで，補題 45.1 を適用すれば，$\mathcal{E}^\infty(\Omega\times Y)$ の相対コンパクトな列 $\{u_k(x,\,y)\}$ が存在して

1) $F(Y)$ の位相は，$\mathcal{D}'(Y)$ からの誘導位相よりも細かいと仮定する．

(収束するようにもとれる!), 各kについて $P(x, y, \partial/\partial x)u_k(x, y) = f_k(x)$ となる. そこで

$$u(x, y) = \sum_k \lambda_k u_k(x, y) g_k(y)$$

とおこう. この級数は $\mathcal{E}^\infty(\Omega) \hat{\otimes} F(Y)$ において収束すること, そうして, $P(x, y, \partial/\partial x)u(x, y) = f(x, y)$ となることを証明しよう (後者は前者からの自明な結果である). そのため, $\mathcal{E}^\infty(Y) \times F(Y)$ から $\mathcal{D}'(Y)$ への双線形写像 $(\phi, g) \mapsto \phi g$ を考える. この写像は分離連続であり, その像は, 仮定によって, $F(Y)$ に含まれる ($F(Y)$ は $\mathcal{D}'(Y)$ に連続的に埋めこまれている). この写像は分離連続であり, したがって, $F(Y)$ に値をとる写像と考えても連続である (これを見るには, 線形写像 $\phi \mapsto \phi g$ および $g \mapsto \phi g$ のグラフが共に閉であることに注意するだけでよい!). ゆえに, g が $F(Y)$ の有界集合にとどまるとき (したがって, もちろんコンパクト集合にとどまるときには), 写像族 $\phi \mapsto \phi g$ は $L(\mathcal{E}^\infty(Y); F(Y))$ の同等連続部分集合をなす. したがって, $F(Y)$ の元 g があたえられたとき, $\mathcal{E}^\infty(\Omega \times Y)$ から $\mathcal{E}^\infty(\Omega) \hat{\otimes} F(Y)$ への写像 $I \hat{\otimes} g$ ($I : \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ の恒等写像) が考えられるが[1], g が $F(Y)$ の有界集合にとどまるとき, これらの写像は同等連続集合をなす. このことから直ちに, k が動くとき, $u_k(x, y)g_k(y)$ が $F(Y)$ の有界集合にとどまることが導かれる. $\sum_k |\lambda_k| < +\infty$ だから, $u(x, y)$ を定義する級数は $F(Y)$ において絶対収束する. これが求める結果であった.

定理 52.6 は, $F(Y) = \mathcal{E}^h(Y)$ $(0 \leqslant h \leqslant +\infty)$ の場合, あるいは, $F(Y) = L^p_{\mathrm{loc}}(Y)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ の場合などに応用することができる.

$$\mathcal{E}^\infty(\Omega) \hat{\otimes} \mathcal{E}^h(Y) \cong \mathcal{E}^\infty(\Omega; \mathcal{E}^h(Y)) \cong \mathcal{E}^h(Y; \mathcal{E}^\infty(\Omega))$$

に注意しよう. 定理によれば, この場合に, 方程式

$$P(x, y, \partial/\partial x)u = f$$

---

1) $g \in F(Y)$ に対して, 写像 $\mathcal{E}^\infty(Y) \ni \phi \mapsto \phi g \in F(Y)$ を同じ記号 g で表わすことにして, 同形 $\mathcal{E}^\infty(\Omega \times Y) \cong \mathcal{E}^\infty(\Omega) \hat{\otimes} \mathcal{E}^\infty(Y)$ を考慮するならば, $I \otimes g : \phi \otimes \psi \mapsto \phi \otimes (\psi g)$ の拡張が $I \hat{\otimes} g$ である.

の解を $\mathcal{E}^{\infty}_{x,y}$ におい求める仕方が，右辺が y に関係しないときに，知られているならば，右辺が空間 $\mathcal{E}^{\infty;h}_{x,y}$ (記号の意味は明らかであろう) に属する任意の元であるときにも，その解をこの空間において求める仕方を知ることになる.

付　　録

Borel グラフ定理

最近 L. Schwartz は次の結果を証明した.

定理 A.1. E, F を二つの局所凸 Hausdorff TVS とし，u を E から F への線形写像とする．いま E を Banach 空間の一つの任意族の帰納的極限，F を Souslin 空間とし，u のグラフは $E\times F$ の Borel 集合とするならば，u は連続である.

これから示すように．定理 A.1 を用いるならば，解析学とくに超関数の理論において出会う大ていの空間のあいだの線形写像について閉グラフ定理が成りたつことがわかる．Schwartz の原証明は，任意の位相空間上の Radon 測度の理論を基礎にしたものであるが，ここでは S. Banach の書物 [0] における議論に沿った A. Martineau の証明を述べよう．Martineau はまた，F が Souslin 空間であるという条件を弱めることにも成功している．その代りに，グラフは単に Borel 集合ではなくて閉集合になることを要求する (このことは広用上は少しも不便ではない!)．この拡張については，付録の最後のところで少し述べよう．文献もそこに掲げてある．さて，これとは独立に，異なる方法を用いて，解析学に現れる空間の広い範囲に対して (とくに $\mathcal{D}'$ も含めて) D. Raikov もまた閉グラフ定理を証明している.

まず定理 A.1 の陳述に現れる術語の説明から始めよう．局所凸空間の帰納的極限については 644 頁に説明を述べた．さて，位相空間 X (代数的構造は何も考えない) の **Borel 集合** (Borel set) とは何であったかを思い出そう．X の

一つの部分集合族 $\mathscr{L}$ が **σ-代数** (σ-algebra)[1] であるとは，$A \in \mathscr{L}$ ならば $X \setminus A \in \mathscr{L}$ であり，$\mathscr{L}$ に属する集合の可算個の共通部分はまた $\mathscr{L}$ に属することをいう（このとき可算個の合併もまた $\mathscr{L}$ に属する）．X の任意の部分集合族 $\mathfrak{S}$ に対して，$\mathfrak{S}$ を含む最小の σ-代数が存在する．これは明白である[2]．このことを X のすべての閉集合からなる族 $\mathfrak{S}$ に適用したときに得られるものが，X の Borel 集合全体のなす σ-代数である[3]．

位相空間 P が**ポーランド的** (Polish) である［または P が**ポーランド空間** (Polish space) である］とは，P 上に距離が存在して，それが P の位相を定義し，この距離に関して P は完備な距離空間となり，さらに，P には到るところ稠密な可算部分集合の存在することをいう（この最後の性質を表わすのに，P は**可分** (separable) であるという）．

定義 A.1. Hausdorff 位相空間 S が **Souslin 空間** (Souslin space) であるとは，一つのポーランド空間 P と P から S の上への連続写像が存在することをいう．

さて，ポーランド空間および Souslin 空間に対する幾つかの“安定性”を述べよう．その大部分は証明を付さない（それらの証明はすべて容易である）．

命題 A.1. 次に述べる空間はすべてポーランド空間である．

(a) ポーランド空間の閉集合，

(b) ポーランド空間の可算族の積および素和[4]，

(c) ポーランド空間の開集合，

(d) 距離付け可能かつ**無限遠で可算的** (countable at infinity)[5] な局所コン

---

1) σ-代数はまた **Borel 集合体** (Borel field) とも言う．定義には $\emptyset \in \mathscr{L}$ を要求する．

2) X の巾集合 $\mathfrak{P}(X)$［すなわち，すべての部分集合のなす族］は $\mathfrak{S}$ を含む σ-代数である．従って，$\mathfrak{S}$ を含むすべての σ-代数の共通部分をとれば，これが求めるものである．

3) すなわち，この σ-代数に属することが，Borel 集合の定義である．

4) 素和 (disjoint union)，上巻 35 頁脚注参照．

5) コンパクト部分集合の可算個の合併になることをこのように表現する．これは，**一点コンパクト化** (one point compactication) したとき，無限遠点の近傍フィルターが可算基をもつことによる．**σ-コンパクト** (σ-compact) ともいう．

パクト空間,

(e)　Hausdorff 位相空間のポーランド的部分空間の可算個の共通部分,

(f)　実直線 $\mathbf{R}$ の位相を無理数全体のなす空間に誘導したもの.

たとえば, (c) を証明してみよう. E をポーランド空間, U を E の開集合とし, d を E 上の距離でその位相を定義するものとする. 積空間 $\mathbf{R}\times E$ は (b) によりポーランド空間になるから, $\mathbf{R}\times E$ の点 (t, x) のうち $t\cdot d(x, E\setminus U)=1$ をみたすもの全体のなす集合 V もまたポーランド空間になる. 実際 V は閉集合だからである. ところで, 第2座標への射影は V から U の上への位相同形写像となるから (c) が得られる.

命題 A. 2. ポーランド空間 P の部分空間 Q がポーランド的であるための必要十分条件は, Q が P の開集合列の [1] 共通部分になることである.

十分性は命題 A. 1 から明らか. その必要性を証明しよう. d を Q 上の距離であって Q の位相を定義し, この d に関して Q は完備距離空間になるものとしよう. いま, $x\in\bar{Q}$ なる点 x のうちで, x の P における開近傍 U を適当にとれば $U\cap Q$ の d に関する直径が $\leqslant 1/n$ とできるような x の全体を Q_n で表わすことにする. Q_n は $\bar{Q}$ において明らかに開集合になる. ところで, すべての n に対して $x^0\in Q_n$ となる点 x_0 を考えると, x_0 の近傍フイルターは明らかに Q 上に距離 d についての Cauchy フイルターを誘導する. [Q に d に関して完備だから, この Cauchy フイルターは収束するが] その極限は x^0 以外にはあり得ない. すなわち $x^0\in Q$. これは $Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}Q_n$ を意味する. 各 n について P の開集合 U_n を $Q_n=\bar{Q}\cap U_n$ となるようにえらんでおく. 以方, δ を P 上の距離で P の位相を定義するものとし,

$$V_m=\{x\in P;\ \delta(x, \bar{Q})<1/m\},\qquad m=1, 2,\dots$$

とおく. そうすれば明らかに $Q=\bigcap_{m,n}U_n\cap V_m$ がなりたつ. (証終).

実直線における単位閉区間 $[0, 1]$ を $\mathbf{I}$ で表わし, その可算無限個のコピーの

1)　すなわち, 可算個の開集合の.

積［これを立方体と呼んで］$\mathbf{I}^{\mathbf{N}}$ で表わそう．X を可分な距離空間とする．X の距離を d で示す．この距離に関する X の直径は $\leqslant 1$ と仮定してもよい．なぜなら，必要ならば d の代りに $(x, y) \mapsto \inf(d(x, y), 1)$ を採用すればよいからである[1]．さて，(x_n) $(n=0, 1, \dots)$ を X における稠密な点列とする．このとき，写像

$$x \mapsto (d(x, x_n))_{n=0,1,\cdots}$$

は X から $\mathbf{I}^{\mathbf{N}}$ の部分集合の上への位相同形写像となる．このことは，読者は容易に検証することができよう．この事実と命題 A.2 を合せれば，次の命題を得る．

命題 A.3. 位相空間 X がポーランド的であるための必要十分条件は，X が立方体 $\mathbf{I}^{\mathbf{N}}$ の開集合列の共通部分に位相同形なことである．

さて今度は Souslin 空間の話に移ろう．Souslin 空間は明らかに可分である．さらに，次の安定性をもつ．

命題 A.4. 次のものはすべて Souslin 空間である．

(a) Souslin 空間の閉集合および開集合，

(b) Souslin 空間の可算個の積および素和，

(c) Hausdorff 位相空間の Souslin 部分空間の可算個の共通部分および合併，

(d) Souslin 空間の連続像[2]．

命題 A.4 は命題 A.1 から容易に出る．ここでは (c) を証明することにしよう．A_n $(n=0, 1, \dots)$ を Hausdorff 空間 X の Souslin 部分空間の列とし，$\dot{A}$ をその素和とする．$\dot{A}$ は (b) により Souslin 空間である．ϕ を $\dot{A}$ から合併 $\bigcup_n A_n$ への標準写像とする．ϕ は連続だから，(d) によってこの合併は Souslin 空間である．次に A_n $(n=0, 1, \dots)$ の共通部分を A' とし，f を X から $X^{\mathbf{N}}$

1) $d(x, y)$ と $\inf(d(x, y), 1)$ が同値な距離になることは読者のやさしい演習問題としよう．

2) すなわち，連続写像による像．

の対角線の上への標準写像とする[1] ($\mathbf{N}$ は整数 $\geqq 0$ の集合). f による A' の像は, この対角線と $\prod_n A_n$ の共通部分に等しい. ところで X は Hausdorff だから対角線は $X^{\mathbf{N}}$ の閉集合であり, f は X から対角線の上への同相写像である. したがって, f の A' への制限は A' から $\prod_n A_n$ の閉集合の上への同相写像となる. これに (a) と (b) を適用すればよい.

命題 A.5. Souslin 空間の Borel 集合は Souslin 空間である.

証　明, Hausdorff 空間 X において, その部分集合であって, それ自身およびその補集合が共に Souslin 空間であるもの全体からなる族を $\mathscr{L}$ としよう. 命題 A.4 (c) によれば, $\mathscr{L}$ は一つの σ–代数である. もし X が Souslin 空間であれば, 命題 A.4 (a) によって, $\mathscr{L}$ は閉集合をすべて含むことになり, したがって Borel 集合をすべて含む.

命題 A.6. S を Souslin 空間とすれば, 各 $n=0, 1, \ldots$ に対して可算集合 C_n と二つの写像 $p_n : C_{n+1} \to C_n$ と $\phi_n : C_n \to \mathfrak{P}(S)$ を次の諸性質を満たすように選ぶことができる.

(A. 1)　p_n は上への写像である.

(A. 2)　各 $c \in C_n$ について

$$\phi_n(c) = \bigcup_{c' \in C_{n+1}, p_n(c') = c} \phi_{n+1}(c');$$

(A. 3)　各 n について, c が C_n を動くとき $\phi_n(c)$ は c が異なれば互に素 (pairwise disjoint)[2] であり, またそれらの合併は S に等しい;

(A. 4)　各 n について $c_n \in C_n$, $p_n(c_{n+1}) = c_n$ となるような任意の列 $\{c_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$) に対して, 集合列 $\{\phi_n(c_n)\}$ は S における収束フィルター基底をなす.

証　明　P をポーランド空間, f を P から S の上への連続写像とする. d を

---

1) すなわち, $f(x) = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ただし $x_n = x$, $\forall_{n \in \mathbf{N}}$.

2) すなわち $c_1 \neq c_2$ ならば $\phi_n(c_1) \cap \phi_n(c_2) = \emptyset$　($c_1, c_2 \in C_n$)

P 上の距離とし，この距離に関して P は完備とする．P は可分だから，各 $n = 0, 1, \ldots$ について，半径が $1/(n+1)$ の閉球の可算族による S の被覆が存在する．各 $n = 0, 1, \ldots$ に対して，そのような被覆 $\mathcal{U}_n$ を一つえらび，$\mathcal{U}_n$ の各元に (任意に) 順序をつける．それを $B_n{}^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ としよう．さて，k に関する帰納法により，集合列 $\{\widetilde{B}_n{}^k\}$ を

$$\widetilde{B}_n{}^{k+1} = f(B_n{}^{k+1}) \cap \left(S \setminus \bigcup_{j=0}^{k} \widetilde{B}_n{}^j\right), \qquad \widetilde{B}_n{}^0 = f(B_n{}^0)$$

によって定める．そうすれば，k が動くとき，集合列 $\widetilde{B}_n{}^k$ の合併が S に等しくまた二つずつ互に素なことは明白である．さて，集合列 $\widetilde{B}_0{}^k$, $k = 0, 1, \ldots$ を C_0 で表わし，次に集合 $\widetilde{B}_0{}^k \cap \widetilde{B}_1{}^l$ $(k = 0, 1, \ldots, l = 0, 1, \ldots)$ のうち空集合でないもののなす族を C_1 で表わす．このようにして，帰納的に，C_m は集合 $\widetilde{B}_m^k \cap c$ $(k = 0, 1, \ldots ;\ c \in C_{m-1})$ のうちで空でないもの全体のなす族とする．写像 ϕ_n を C_n の各元 c に対して S の部分集合としての c を対応させるものとすれば．条件 (A. 3) は明らかに満たされている．写像 p_n の定義は次のようにする．$c' \in C_{n+1}$ とすると，C_n の元で c' を含むものが唯一つ存在するから，その元を $p_n(c')$ と定義する．そうすれば，条件 (A. 2) は明らかに満たされる．条件 (A. 4) は次のようにしてわかる．各 $n = 0, 1, \ldots$ に対して次の性質をもつ P の部分集合 A_n が存在する．すなわち，$f(A_n) = c_n$，A_n の直径は $\leqslant 1/(n+1)$，$A_{n+1} \subseteq A_n$．これらの A_n は P 上の Cauchy フィルター基底をなすから，P の完備性により，P において収束する．これから (A. 4) が従う．

定義 A. 2. X を位相空間，Y をその部分集合とする．このとき，X における Y の **Baire 閉包** (Baire closure) とは，次の性質をもつ点 $x \in X$ の全体のなす集合である．

(A. 5)　x の任意の近傍は (X において) **やせていない** (not meager)[1] Y の

---

1) X の部分集合 A が (X において) **やせている** (meager) とは，内点をもたない (X の) 閉集合列 F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が存在して $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ となることを言う．条件 (A. 5) は，x の任意の近傍 U に対して，$U \cap Y$ がやせていないことを言う．(上巻 92 頁参照)．

部分集合を含む.

Y の Baire 閉包を $b(Y)$ で表わす. 明らかに, $b(Y)$ は X の閉集合である.

命題 A.7. X を位相空間とし, Y をそのやせていない集合とする. このとき, $b(Y)$ の内部 $o(Y)$ は空ではない.

証 明 証明すべきことは. X の開集合 $\Omega\,(\neq \emptyset)$ が存在して, Ω の任意の開部分集合 $\Omega'\,(\neq \emptyset)$ について $\Omega' \cap Y$ がやせていないことである. $Y \cap O_i$ がやせているような空でない開集合 O_i の族であって, 二つづつ互に素となるようなもののうちで極大なものを $\mathscr{M} = \{O_j;\ i \in I\}$ としよう[1]. このとき, $O_i (i \in I)$ の合併集合を O とすれば, $Y \cap O$ もやせた集合である. その理由は, Y との交わりがやせているような O_i の可算個の合併だからというわけではない. 実際, 添字 i の集合 I は可算であるとは限らない. 実際の理由は O が O_i の素和で, 各 O_i が開集合であることによる[2]. O の補集合を F とすれば, Y がやせていないことにより, F はやせていない閉集合である. したがって, その内部 $\mathring{F}$ は空ではない. 開集合族 $\mathscr{M}$ の極大性により, $\mathring{F}$ のどの開部分集合 $(\neq \emptyset)$ も Y の共通部分がやせた集合にならないから $\mathring{F} \subseteq o(Y)$ となる. (証終).

集合 Y の部分集合で $b(Y)$ の外にあるものはやせた集合だから, Y のやせた部分集合を除いて Y を含む最小の閉集合が $b(Y)$ である. $o(Y)$ はその空でない開部分集合と Y の共通部分がすべてやせていないような開集合のうちで最大のものである. 明らかに $b(Y) \setminus o(Y)$ はやせた集合である[3]. したがって, $\overline{o(Y)}$

1) 条件を満たす開集合族の全体に包含関係で順序を入れると, それが帰納的順序集合となり, Zorn の補題により, 極大元が存在する.

2) 実際, 各 $i \in I$ について $Y \cap O_i$ はやせた集合だから, X において**希薄な集合** (rare set, すなわち, その X における閉包が内点をもたない集合) の可算族 $A_n^{(i)}\ (n \in \mathbf{N})$ が存在して $Y \cap O_i \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n^{(i)}$ となる. $A_n^{(i)} \subseteq O_i$ と仮定してよく, また O_i は開集合だから, $A_n^{(i)}$ は O_i において希薄としてよい. このとき $A_n = \bigcup_{i \in I} A_n^{(i)}$ とすれば, この合併は素和になることより, A_n は $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ において希薄であり, もちろん X において希薄となる. $Y \cap O \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ だから, $Y \cap O$ はやせた集合である.

3) 一般に, 開集合または閉集合の境界集合はつねに希薄な集合 (前脚注参照) である. 勝手な集合の境界はそうとは限らない.

$= b(Y)$.

命題 A.8. $\{Y_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を位相空間 X のやせていない集合の列とし，Y をその合併集合とする．このとき，$b(Y) \setminus \bigcup_n o(Y_n)$ はやせた集合である[1]．

証　明　$o(Y)$ の任意の空でない開部分集合は Y のやせていない部分集合を含むから，それは或る Y_n のやせていない部分集合を含み，したがって $o(Y_n)$ と交わる．これは，$\bigcup_n o(Y_n)$ が $o(Y)$ の稠密な開部分集合であることを示している．したがって，その $o(Y)$ における補集合はやせた集合であり，$b(Y)$ における補集もまたやせた集合になる．なぜなら $b(Y) \setminus o(Y)$ がやせているからである．

いまや，定理 A.1 の証明のための主要な段階に来た．

定理 A.2. X を Hausdorff 位相空間[2]，S をその Souslin 部分空間とする．このとき，S と $o(Y)$ の差，したがって S と $b(S)$ の差もまたやせた集合である[3]．

証　明　命題 A.6 に述べた性質をもつ 3-系の列 (C_n, p_n, ϕ_n) $(n = 0, 1, \ldots)$ を用いる．各 $c \in C_n$ に対して，集合

$$M_n(c) = b[\phi_n(c)] \setminus \bigcup_{c' \in C_{n+1}, p_n(c') = c} b[\phi_{n+1}(c')]$$

は，命題 A.8 と (A.2) により，やせた集合である．したがって

$$M = \bigcup_{\substack{n=0,1,\ldots \\ c \in C_n}} M_n(c)$$

もまたやせた集合である．かくして，定理を証明するには，$o(S) \cap (X \setminus M) \subseteq S$ を示せば十分である．ところで，$x \in o(S) \cap (X \setminus M)$ とすれば，$S = \bigcup_{c \in C_0} \phi_0(c)$

1) 各 Y_n がやせていないという仮定は不要であるが，そのような時だけが証明を要する場合である．

2) 次頁脚注 2 参照．

3) 二つの集合 A と B の差がやせているとは，その**対称差** (symmetric difference) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ がやせた集合になることをいう．

なることから，$c_0 \in C_0$ が存在して $x \in b(\phi_0(c_0))$ となる[1]．$x \in o(S)$ かつ $x \notin M_0(c_0)$ だから，$c_1 \in C_1$ が存在して $p_1(c_1) = c_0$ かつ $x \in b(\phi_1(c_1))$ となる等々．このようにして，(A. 4) に述べたような列 $\{c_n\}$ を得る．各 $n = 0, 1, \ldots$ について $x \in b(\phi_n(c_n)) \subseteq \overline{\phi_n(c_n)}$ が成り立つ．集合列 $\phi_n(c_n)$ は一意的に定まる S の一点に収束するから，$\{\overline{\phi_n(c_n)}\}$ についても同様である[2]．この極限点は明らかに x に一致しなければならないから，x は S に属する．(証終).

定理 A. 3. E を Baire 空間となる Hausdorff TVS とし，S をその平衡的凸部分集合とする．いま S をやせていない集合とし，S は Souslin 空間であるとすると，S は E における原点 0 の近傍である．

証　明　S はやせていないから，$o(S) \neq \emptyset$ (命題 A. 7)．$a \in S \cap o(S)$ としよう．演算 $S \mapsto o(S)$ は，平行移動および 0 でない数によるスカラー乗法のもとで不変であるから，$o(2S) = o(S-S) \supseteq o(S-a) = o(S)-a$．ところで $o(S)$ は a を含む開集合だから，$o(S)-a$ は原点の近傍であり，したがって $o(2S)$ も原点の近傍になる．したがって $o(S) = (1/2)o(2S)$ もまた原点の近傍になる．かくして，証明を完成するためには，$o(S) \subseteq 2S$ となることを示せば十分である．$x \in o(S)$ としよう．$o(S)$ は原点 0 の近傍だから，$o(S) \cap [x-o(S)]$ は空でない開集合となるが，その $S \cap (x-S)$ との差はやせた集合である．したがって $S \cap (x-S) \neq \emptyset$ を得る[3]が，これは $y \in S$ が存在して $x-y \in S$ なることを示している．故に $x \in 2S$．(証終).

定理 A. 1. の証明． E を Banach 空間の一つの任意族 $\{E_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ の線形写像族 $\phi_\alpha : E_\alpha \to E$ による帰納極限としよう．F を任意の局所凸 TVS としたとき，線形写像 $u : E \to F$ が連続になることは，各 $\alpha \in A$ に対して $u_\alpha =$

1)　簡単のためには，$M_{-1} = b(S) \setminus \bigcup_{c \in C_0} b[\phi_0(c)]$ とおいて，これも M に付加しておくとよい．

2)　このためには，X は**正則空間** (regular space) [すなわち，X は Hausdorff であるうえに，“X の任意の点 x に対して，x の閉近傍全体が x の基本近傍系をなす.”] と仮定しなければならない．ところで，Hausdorff TVS はすべて正則である (上巻 29 頁，命題 3.1 参照)

3)　E は Baire 空間だから，空でない開集合はやせていない．

$u\circ\phi_\alpha : E_\alpha \to F$ が連続になることとは同値である．u_α のグラフは $E_\alpha\times F$ から $E\times F$ への写像 $(x_\alpha, y)\mapsto(\phi_\alpha(x_\alpha), y)$ による，u のグラフの逆像である．ところで，Borel 集合の連続写像による逆像が Borel 集合になることは見やすい．かくして，定理を証明するには，E が Banach 空間であると仮定してよいことになる．したがって，u の連続性を云うには，u の列的連続性を云えばよく，それには，u を与えられた（しかし任意の）列を含む最小の閉部分空間に制限して考えればよい．換言すれば，E を可分な Banach 空間と仮定してよいのである．

さて，u のグラフを G とし，F における 0 の任意の平衡的閉凸近傍を V とする．G と $E\times V$ の共通部分を W とすれば，W はもちろん Borel 集合である．他方，E, F 共に Souslin 空間（E はポーランド空間!）だから，$E\times F$ は Souslin 空間である．命題 A. 5 によって，W もまた Souslin 空間となり，したがってその第 1 座標空間への射影による像もまた Souslin 空間となる．この像とは $U=u^{-1}(V)$ にほかならない．U は E の平衡的凸集合であるが，さらに，やせていない集合である．それは，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ だからである[1]．かくして，定理 A. 3 により，U は E における 0 の近傍である．（証終）．

系 1. E, F を局所凸 Hausdorff TVS とする．E は Banach 空間族の帰納極限，F は Souslin 空間とし，$v : F\to E$ を線形連続写像とする．もし v が上への写像であれば，v は開写像である．

証　明　$\bar{v} : F/\mathrm{Ker}\, v \to E$ を付随する単射とする．$\bar{v}$ は連続だから，$\bar{v}^{-1}$ のグラフは閉集合である．ところで，$F/\mathrm{Ker}\, v$ は Souslin 空間（命題 A. 4, (d)）だから，定理 A. 1 により $\bar{v}^{-1}$ は連続である．（証終）．

系 2. $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ を同一のベクトル空間 E 上の二つの局所凸 Hausdorff 位相とする．どちらの位相に関しても，E は Banach 空間族の帰納極限かつ Souslin

1) これは，V が F の 0 の近傍だから吸収的なことによる．

空間になるとする．もし$\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$の下限位相[1]がHausdorffであるならば，$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$である．

系 3. TVS EをSouslin空間かつBanach空間族の帰納極限とする．このとき，もしEがその二つの閉部分空間の代数的直和となるならば，それは位相的にも直和である．

さて次に，超関数の理論に現われる重要な空間の大部分，とくに$\mathcal{D}'$はSouslin空間になることを手取り早く示そう．

もちろん，可分なFréchet空間はSouslin空間であり，事実ポーランド空間であるが，さらに次のことが成りたつ．

命題 A.9. 可分なFréchet空間の弱双対および可分なFréchet-Montel空間の強双対はともにSouslin空間である．

証 明 Eを可分なFréchet空間とし，$\{U_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$をEにおける0の基本近傍系，$U_n{}^0$をU_nの極集合とする．Eの双対E'は(弱コンパクト凸平衡的)集合列$U_n{}^0$, $n = 1, 2, \ldots$の合併に等しい．命題A.4,(c)によれば，仮定から$U_n{}^0$がSouslin空間であることを示すと十分である．弱位相に関しては，このことは演習問題32.9から従う．EがFréchet-Montel空間のときの強位相に関しては，このことは弱位相の場合の事実と命題34.6から従う．

命題A.9とその前に述べた注意から，次の諸空間がSouslin空間であることがわかる(ただし，Ωは$\mathbf{R}^n$の開集合，Kは$\mathbf{R}^n$のコンパクト集合とする)．

$L^p(\Omega)$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(s \in \mathbf{R})$,

$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{E}_c{}^\infty(K)$, $L_c{}^p(K)$, $H_c{}^s(K)$

$(1 \leqslant p < \infty, s \in \mathbf{R})$; $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, $(\mathcal{E}_c{}^\infty(K))'$.

---

1) 位相の順序(上巻11頁参照)についての下限．Eに位相$\mathcal{T}_j$を入れたものをE_jで表わすならば$(j = 1, 2)$，二つの写像$\phi_j : E \to E_j$ $(j = 1, 2$; 共に恒等写像$)$によるEの射影極限位相(644頁参照)$\mathcal{T}$が$\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$の下限である．

さらに，Souslin 空間の可算族の帰納極限は Souslin 空間になる［命題 A. 4 (c)］ことを用いれば，

$$L_c^p(\Omega)\ (1 \leqslant p : \text{有限}),\ H_c^s(\Omega),\ \mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$$

が Souslin 空間であることがわかる．

次に，Souslin 空間の可算族の射影極限が Souslin 空間になることを用いよう．この事実は，命題 A. 4 と空間族 $E_\alpha\ (\alpha \in A)$ の射影極限は $E_\alpha\ (\alpha \in A)$ の積空間の閉部分空間になる事実から従う．

$\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ は，K が Ω の増大するコンパクト集合列でその内部の合併が Ω 全体になる列を動くときの $\mathcal{E}_c^\infty(K)$ の帰納極限である．したがって，その双対 $\mathcal{D}'(\Omega)$ は双対 $(\mathcal{E}_c^\infty(K))'$ の射影極限となるが，$(\mathcal{E}_c^\infty(K))'$ は Souslin 空間だから，$\mathcal{D}'(\Omega)$ も Souslin 空間である．

次のことも証明できる．E が可分 Fréchet 空間族の可算帰納極限，F は可分 Fréchet 空間族の連続線形写像による像の可算個の合併であるならば，$L_c(E, F)$ は Souslin 空間となる．

最後に，A. Martineau によって得られた，定理 A. 1 の改良について述べよう．位相空間 X が **$K_{\sigma\delta}$-空間** ($K_{\sigma\delta}$-space) であるとは，X がコンパクト集合の可算合併の可算共通部分に等しいことを云う[1)]．Hausdorff 空間 X が **K-解析的** (K-analytic) であるとは，一つの $K_{\sigma\delta}$-空間 Y と，Y から X の上への連続写像 f が存在することを云う．Martineau の定理の云うところは，定理 A. 1 において，仮定 “F は Souslin 空間である” を “F は K-解析的空間である” におきかえ，仮定 “u のグラフは Borel 集合である” を “u のグラフは閉集合である” におきかえても，定理の結論は正しいということである．

命題 A. 3 から容易にわかるように，Souslin 空間はつねに K-解析的である．ところで，コンパクト空間はつねに K-解析的だから，可分でない K-解析的空間は存在する．かくして，Martineau の定理は，真の拡張になっている．た

1) これは，X が或る位相空間 $\widetilde{X}$ に含まれていて，コンパクト集合，合併共通部分などは $\widetilde{X}$ におけるものと考えてよい．$K_{\sigma\delta}$ の K はコンパクト (Kompakt)，σ は合併 (Summe)，δ は共通部分 (Durchschnitt) を表わす．

とえば，Fréchet 空間の弱双対はつねに K-解析的であるが，必ずしも可分ではない（したがって Souslin 空間ではない）．同じ注意は，回帰的 Fréchet 空間についても成りたつ．

付録のための文献

Bourbaki, N., "Topologie Générale," 2ème éd., Chapter 9 (Utilisation des nombres réels entopologie générale), Section 6. Hermann, Paris, 1958.

Martineau, A., Sur le théorème du graphe fermé. *Compt. Rend. Acad. Sci,* **263,** 870 (1966).

Raikov, D., Two-sided closed graph theorem for topological vector spaces. *Sibirsk. Mat.* Z. **7,** 353 (1966).

Schwartz, L., Sur le théorème du graphe fermé, *Compt. Rend. Acad. Sci,* **263,** 602 (1966).

文　献　表

(本書からさらに読み進めるためのもの)

位相ベクトル空間について：

(0) Banach, S., "Théorie des Opérations Linéaires." Warsaw, 1932.

(1) Bourbaki, N., "Espaces Vectoriels Topologiques," 2 vols. Hermann, Paris, 1953 and 1955.

(2) Dieudonné, J., and Schwartz, L., La dualité dans les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{L}\mathscr{F}$). *Ann. Inst. Fouuier Grenoble* **I** (1949), 61–101.

(3) Horvath, J., "Topological Vector Spaces." Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

(4) Köthe, G., "Topologische Lineare Raume," Vol. I. Springer, Berlin 1960.

ノルム空間について：

(5) Day, M. M., "Normed Linear Spaces," Ergebnisse der Mathematik.... Berlin, 1962 (2nd print.).

(6) Dunford, N., and Schwartz, J. T., "Linear Operators," Parts I and II, Wiley (Interscience), New York, 1958 and 1964.

(6′) Yosida, K., "Functional Analysis." Academic Press, New York, and Springer, Berlin, 1965.

位相ベクトル空間と超関数について：

(7) Edwards, R. E., "Functional Analysis." Holt, New York, 1965.

(8) Gelfand, I. M., and Silov, G., "Generalized Functions." Academic Press, New York. 1964.

(9) Schwartz, L., "Théorie des Distributions," Parts I and II. Hermann, Paris, 1957 and 1965 (3rd print.).

超関数と偏微分方程式について：

(10) Friedman, A., "Generalized Functions and Partial Differential Equations." Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

(11) Hörmander, L., "Linear Partial Differential Operators." Springer, Berlin, 1963.

(12) Treves, F., "Linear Partial Differential Operators with Constant Coefficients." Gordon and Breach, New York, 1966.

位相テンソル積と核について：

(13) Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.* **16** (1955).

(14) Schwartz, L., Produits tensoriels topologiques. Séminaire, Paris, 1953–4.
Schwartz, L., Distributions à valeurs vectorielles. Vols. I and II. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **VII** (1957), 1–141, **VIII** (1959), 1–207.

(入 門 書 的 な も の)

(15) Goffmann, C., and Pedrick, G., "A First Course in Functional Analysis." Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

(16) Robertson, A. P., and Robertson, W. J., "Topological Vector Spaces." Cambridge University Press, London and New York, 1964.

訳者あとがき

原著に散見された誤りは，この訳書ではすべて訂正したつもりである．読者の理解を容易にするために，相当多くの脚注を付したが，ここでは，脚注に入れきれなかった Šmulian の定理および正線形形式の拡張定理とその応用を述べる．最後に，参考書を若干追加しておこう．

1. Šmulian の定理について (566 頁脚注参照)

X が距離付け可能な空間ならば，そのコンパクト部分集合 K は，よく知られているように，次の性質をもつ．

(B.1.1) $\begin{cases} K \text{ に含まれる任意の点列 } \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ は，その適当な部分列をとれば，} \\ K \text{ の点に収束する．} \end{cases}$

しかしながら，X が距離付け可能でないときには，そのコンパクト部分集合 K は，一般には，もはや性質 K を持つとは限らない．そのことを次の例で示しておこう．

例 複素体 $\mathbf{C}$ の非可算個のコピーの直積空間 $X=\prod_{t\in[-\pi,\pi]} X_t$ を考える．ただし，すべての $t(\pi \leqq t \leqq \pi)$ について $X_t=\mathbf{C}$ である．或は簡単に $X=\mathbf{C}^{[-\pi,\pi]}$ と巾(べき)の形に書いてもよい．これは，閉区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された複素数値関数全体の空間である．そう考えれば，直積空間の位相は，関数の各点収束の位相に一致する．このとき，X の部分集合として，

$$K=[-1, 1]^{[-\pi,\pi]}$$

を取ろう．これは，Tychonov の定理 (上巻 69 頁，定理 6.1) によって，X のコンパクト部分集合である．K は $[-\pi, \pi]$ で定義され，その値が $[-1, 1]$ に入るような関数の全体に等しい．この K が性質 (B.1) をもたないことを示そう．

Kに含まれる点列 $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ として，次の関数を考えるとよい．

$$\text{(B.1.2)} \qquad f_n(t) = \sin nt, \qquad t \in [-\pi, \pi],\ n = 1, 2, \ldots.$$

もしこの適当な部分列 $\{f_{n'}\}_{n' \in N'}$ が各点収束するならば，これは Canchy 列となり，したがって，各 $t \in [-\pi, \pi]$ に対して，

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ m,n\in N'}} |f_m(t)-f_n(t)|^2 = 0$$

となるはずである．$|f_m(t)-f_n(t)|^2 \leqslant 4$ だから，Lebesgue の有界収束の定理によって

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ m,n\in N'}} \int_{-\pi}^{\pi} |f_m(t)-f_n(t)|^2 dt = 0$$

を得ることになるが，この左辺の積分は実際計算によって，$m \neq n$ である限り 2π に等しい．これは矛盾である．したがって，Kの点列 (B.2) は，そのどんな部分列をとっても収束しない．

上の例によって，次の **Šmulian の定理**の自明でないことがわかる．実際，E が距離付け可能な TVS であっても，その弱位相 $\sigma(E, E')$ は一般には距離付け可能でないからである．

定理 B.1.3. Eを距離付け可能な局所凸 TVS とし，Kをその弱コンパクト部分集合とすれば，Kは弱位相 $\sigma(E, E')$ に関して性質 (B.1.1) をもつ．

この証明の準備として，まず次の補題を述べよう．

補題 B.1.4. Xをコンパクト空間，$C_s(X)$ をX上の複素数値連続関数全体のなす空間に各点収束の位相を入れたものとし，Kを $C_s(X)$ のコンパクト部分集合とすれば，Kは性質 (B.1.1) をもつ．

補題 B.1.4 の証明 まずXが距離付け可能な場合を考えよう．このときXはコンパクトだから可分である．ところでKはコンパクトだから，それより弱い任意の Hausdorff 位相と一致する (上巻 62 頁，命題 6.4)．したがって，Kが (B.1.1) をもつことを言うのに，Xの稠密な可算集合の上での各点収束の位

相に関して言えばよい．ところで，このときKの位相は距離付け可能(上巻87頁)だから，(B.1.1)が成り立つ．さて，一般の場合について言うには，Kに含まれる(可算)列$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$について言うとして，Xに$f_n(n\in\mathbf{N})$をすべて連続にするような最も弱い位相を入れ，それをHausdorffになるようにクラス分けした商空間を$\tilde{X}$とするならば[1]，$\tilde{X}$は距離付け可能なコンパクト空間となり，各f_nを$f_n\in C_s(\tilde{X})$と考えることにより，はじめの場合に帰着する．

定理 B.1.3 の証明　$\{V_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$を$E$の0の近傍の可算基底とすれば，$E'=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} V_\nu{}^0$と表わすことができる各$V_\nu{}^0$は$\sigma(E', E)$に関してコンパクトである(命題32.8)．さて，$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$を$E$の弱コンパクト集合$K$に含まれる点列としよう．$K$は明らかに各$\nu$について$C_s(V_\nu{}^0)$の部分集合と考えてコンパクトだから[2]，補題B.1.4によって，適当な部分列$\{x_{n_1}\}_{n_1\in N_1}$は$V_1{}^0$上で各点収束する．その適当な部分列$\{x_{n_2}\}_{n_2\in N_2}$は$V_2{}^0$上でも各点収束する．以下同様にして進めば，対角線論法により，$\{x_{n_n}\}_{n=1,2\cdots}$は$\sigma(E, E')$について収束する部分列である．(証終)

2. 正線形形式の拡張定理について (629頁脚注参照)

考察するベクトル空間は，すべて実数体$\mathbf{R}$上のものとする(複素ベクトル空間ならば，そのスカラー乗法を実数に制限して考えればよい)．いま，Eを一つのベクトル空間として，Eにはその線形構造と整合する一つの順序関係(それを$\geqslant$で表わす)があたえられているとする(上巻236頁，演習問題18.6参照)．このとき，Eは一つの**順序ベクトル空間** (ordered vector space) であると言う．順序ベクトル空間E上の線形形式fが正であるとは，任意の$x\in E$, $x\geqslant 0$に

1) Xの元xを求値写像$x: C_s(X)\ni f\mapsto f(x)\in\mathbf{C}$によって$C_s(X)$の双対$(C_s(X))'$の元と同一視することにより，$X$を$(C_s(X))'$に埋めこんで考える．$(C_s(X))'$に$f_n(n\in\mathbf{N})$をすべて連続にする最弱の位相を入れ，それを$F=\{f_n; n\in\mathbf{N}\}$の極$F^0$で割った商位相ベクトル空間$(C_s(X))'/F^0$を考える．標準写像$\varphi: (C_s(X))'\to(C_s(X))'/F^0$による$X$の像$\varphi(X)$を$\tilde{X}$とする．明らかに各$f_n$は$\tilde{X}$上の連続関数と考えることができる．

2) 詳しく言うならば，Kの各元をE_σ'上の連続関数と考えて，それを$V_\nu{}^0$に制限したものが$C_s(\mathrm{V}_\nu{}^0)$のコンパクト集合となる．

対して $f(x) \geqslant 0$ となることを言う (上巻237頁, 演習問題18.7参照).

正線形形式の拡張定理を述べて証明しておこう.

定理 B.2.1. E を順序ベクトル空間, V をその部分ベクトル空間とし, 任意の $x \in E$ に対して $y \in V$ が存在して $y \geqslant x$ となると仮定する. このとき, V 上の任意の正線形形式 f は E 上の正線形形式に拡張することができる. さらに. f の拡張となる E 上の正線形形式 h 全体のなす集合を S_f と書けば, 任意の点 $a \in E$ について, h が S_f の中を動くときの値 $h(a)$ の集合は閉区間 $[\alpha', \alpha'']$ に一致する. ただし

(B.2.2) $$\alpha' = \sup_{z \in V, z \leqslant a} f(z), \qquad \alpha'' = \inf_{y \in V, y \geqslant a} f(y)$$

とする.

証　明　1°. まず $E = V + \mathbf{R}a$ となる場合について考えよう. $a \in V$ ならば定理は自明だから, $a \notin V$ の場合だけ考えればよい. V に対する仮定から二つの集合

$$A' = \{y\,;\, y \in V,\ \ y \geqslant a\},$$
$$A'' = \{z\,;\, z \in V,\ \ z \leqslant a\}$$

は共に空ではない ($A'' = \{z \in V\,;\, -z \geqslant -a\}$ だから). ところで, $y \in A'$, $z \in A''$ とすれば, $z \leqslant a \leqslant y$ だから, f が正線形なることによって, $f(z) \leqslant f(y)$ が成りたつ. このことから, α', α'' は共に有限で $\alpha' \leqslant \alpha''$ となることがわかる. f の拡張となるような E 上の線形形式 f_1 は, 点 a における値 $f_1(a)$ によって完全に決まる. 実際, 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ と任意の $x \in V$ に対して

$$f_1(x+\lambda a) = f(x)+\lambda f_1(a)$$

となるからである. f_1 が正になるためには, 条件

(B.2.3) $$x \in V,\ \ \lambda \in \mathbf{R},\ \ x+\lambda a \geqslant 0$$

から不等式

(B.2.4) $$f(x)+\lambda f_1(a) \geqslant 0$$

がしたがうことが必要十分である. ところで, $f(\mu x) = \mu f(x)$ であり, $\mu < 0$ な

らば，条件 $x \geqslant 0$ と条件 $\mu x \geqslant 0$ とは同値だから，(B.2.3) から (B.2.4) がしたがうことを言うのに，$\lambda=0$，$\lambda=1$，$\lambda=-1$ の三つの場合に言えば十分である．$\lambda=0$ の場合は，f が正なことから明らかである．$\lambda=1$ の場合は，$-x \in A'$ ならば $f_1(a) \geqslant f(-x)$ となること，換言すれば $f_1(a) \geqslant \alpha'$ となることである．$\lambda=-1$ の場合は，$x \in A''$ ならば $f(x) \geqslant f_1(a)$ となること，換言すれば $f_1(a) \leqslant \alpha''$ となることである．これで $E=V+\mathbf{R}a$ となる場合の証明は終った．

2°．一般の場合に証明するために，E の部分ベクトル空間で V を含むもの W と，W 上の正線形形式 g で f の拡張となっているものの対（つい）(W, g) の全体を $\mathfrak{F}$ とする．$\mathfrak{F}$ の二つの元の順序

$$(W, g) \leqslant (W', g')$$

を，$W \subseteq W'$ かつ g' は g の拡張になっているとして定義する．$\mathfrak{F}$ が帰納的順序集合になることはただちにわかる．したがって，Zorn の補題（上巻 67 頁脚注 2 参照）によって，$\mathfrak{F}$ には極大元 (W_0, g_0) が存在する．もし $W_0 \neq E$ であれば，ベクトル $b \notin W_0$ が存在することになるが，$W_1=W_0+\mathbf{R}b$ とすれば，1° の場合によって g_0 を拡張するような W_1 上の正線形形式 g_1 が存在することになり，(W_0, g_0) の極大性に反する．したがって，$W_0=E$ となり，定理の前段は証明された．定理の後段は，$a \in V$ ならば，$\alpha'=\alpha''=f(a)$ として明らかである．$a \notin V$ ならば，$V_1=V+\mathbf{R}a$ とおくことによって，1° の場合から出る．（証終）

上の定理の応用として，コンパクト空間上の正測度に対する定理 B.2.7 を証明するのが目的であるが，そのために測度に関することを簡単に復習しておこう．X をコンパクト空間とし，$C(X)$ を X 上の実数値連続関数全体のなす空間とする．$C(X)$ には一様収束の位相を入れて考える．これは Banach 空間である．$\varphi \in C(X)$ のノルムは

$$\|\varphi\|=\max_{x \in X}|\varphi(x)|$$

によって定義される．$C(X)$ の双対 $C'(X)$ は X 上の Radon 測度の空間である．

$C(X)$ 上の正線形形式 f は X 上の正 Radon 測度である．それは，不等式

$$-\|\varphi\| \leqslant \varphi \leqslant \|\varphi\|$$

から

$$|f(\varphi)| \leqslant f(1)\|\varphi\|$$

が出ることによる．Y をもう一つのコンパクト空間として，$u : X \to Y$ を連続写像とすれば，これから連続線形写像

$$u_* : C(Y) \to C(X) \qquad \text{(B.2.5)}$$

が誘導される．それは $\varphi \in C(Y)$ に対して $\varphi \circ u \in C(X)$ を対応させるものである．その転置として

$$u^* : C'(X) \to C'(Y) \qquad \text{(B.2.6)}$$

が定義できる．明らかに，u^* は X 上の正 Radon 測度を Y 上の正 Radon 測度に写す．

定理 B.2.7. X, Y をコンパクト空間，$u : X \to Y$ を X から Y の上への連続写像とする．このとき，写像 u^* は X 上の正 Radon 測度の空間 $C_+'(X)$ を Y 上へ正 Radon 測度の空間 $C_+'(Y)$ の上に写す．さらに，μ, ν をそれぞれ X および Y 上の正 Radon 測度として，$u^*(\mu) = \nu$ とすれば，μ による X の全測度と ν による Y の全測度は一致する．

証　明　まず後段のことを示すために，$u^*(\mu) = \nu$ とすれば，定義によって，任意の $\varphi \in C(Y)$ について

$$\langle \mu, \varphi \circ u \rangle = \langle \nu, \varphi \rangle \qquad \text{(B.2.8)}$$

が成り立つ．ここで $\varphi \equiv 1$ とすれば，$\varphi \circ u \equiv 1$ だから $\langle \mu, 1 \rangle = \langle \nu, 1 \rangle$．すなわち，全測度は等しい．

さて，$\nu \in C_+'(Y)$ を任意にとったとき，(B.2.8) が成立するような $\mu \in C_+'(Y)$ の存在を示すことが目的である．そこで $C(X)$ の部分ベクトル空間として

$$V = \{\varphi \circ u \,;\, \varphi \in C(Y)\}$$

を考え，V 上の正線形形式 f を $f:\varphi\circ u\mapsto\langle\nu,\varphi\rangle$ によって定義しよう．これが定義になっていることは，u が全射であることからただちにわかる（$\varphi\circ u=\phi\circ u$ ならば $\varphi=\phi$ となるから）．そこで $E=C(X)$, V, f に定理 B.2.1 を適用する．V が条件を満たしていることは，V が定数関数をすべて含んでいることから明らかである．f を E 全体に拡張した正線形形式を μ とすれば，これが求めるものである．(証終).

3. 参考文献

日本語で書かれたものを若干挙げれば

吉田耕作：近代解析，共立出版 (1958).

吉田耕作・河田敬義・岩村聯：位相解析の基礎，岩波書店 (1959).

溝畑茂：偏微分方程式論，岩波書店 (1965).

伊藤清三：偏微分方程式，培風館 (1966).

熊ノ郷準：擬微分作用素論，岩波書店 (1974).

などがある．

これらは関数解析，超関数に関することの説明も含んでおり，得るところが多いであろう．

最後に，本書の著者による

F. Trèves : Basic Partial Differential Equations, Academic Press (1975).

を挙げておく．

記号索引

1. 基本的記号

$\mathbf{R}$	10
$\mathbf{Q}$	10
$\mathbf{C}$	17
$\mathbf{N}$	35
$\mathbf{N}^n$	35
$\mathbf{R}^n$	66
$\mathbf{R}^n_+$	291
$\mathbf{I}^{\mathbf{N}}$	691
$X^{\mathbf{N}}$	691
$x=(x_1,\dots,x_n)$	105
$\partial/\partial x_j$	105
$\|x\|=(x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2)^{1/2}$	113
$\|\zeta\|=(\|\zeta_1\|^2+\cdots+\|\zeta_n\|^2)^{1/2}$	74
$dx=dx_1\dots dx_n$	122
$\partial/\partial z_j$	111
$\partial/\partial \bar{z}_j$	283
$\langle x, \xi\rangle$	329
$p=(p_1,\dots,p_n)$	105
$\|p\|=p_1+\cdots+p_n$	106
$p!=p_1!\cdots p_n!$	111
$\binom{p}{q}$	306
$q\leqslant p$	306
$(\partial/\partial x)^p$	106
$(\partial/\partial z)^p$	111
X^p	112
$P(x, \partial/\partial x)$	304
${}^tP(x, \partial/\partial x)$	306
D	486
${}^tD$	487
$\bar{A}$	9
$\mathring{A}$	9
$\mathcal{T}\geqslant\mathcal{T}'$	11
$\complement A$ (A の補集合)	194
$X\setminus A$ (X における A の補集合)	689
meas(K)	260
$b(Y)$	694
$o(Y)$	694
$I_A(\eta)$	380

2. 抽象関数解析の記号

E/M	19
$\mathrm{Im}\, f$	19
$\mathrm{Ker}\, f$	19
$\mathcal{L}(E;F)$	21
$\mathcal{F}(E;F)$	20
F^E	418
E^*	21

E' 21, 43
$\widehat{E}$ 47
$\bar{E}'$ 142
$\langle x', x\rangle$ または $\langle x, x'\rangle$ 239
$M^{\perp}$ 22
TVS 25
LC–空間 107
$L(E; F)$ 43
$\dim E$ 96
A^0 239
A^{00} 448
$\oplus$ 100
$\overline{\{0\}}$ 39
U_p 76
$\mathring{U}_p$ 76
$\dot{p}$ 82
$d(x, y)$ 87
$\| \ \|$ 117
$\| \ \|_E$ 249
${}^t u$ 228, 244, 294
u^* (代数的転置) 21
u^* (共役) 309, 610
$\sqrt{u}$ 612

$\mathfrak{S}$ 240, 414
$E'_{\mathfrak{S}}$ 242, 244
E'_σ 242
E'_γ 242
E'_c 242
E'_b 243
$\sigma(E', E)$ 242
$\sigma(E, E')$ 447
$\sigma(F, G)$ 447
$\gamma(E', E)$ 242
$c(E', E)$ 243
$b(E', E)$ 243
$\tau(E, E')$ 459
$L_{\mathfrak{S}}(E; F)$ 415
$L_\sigma(E; F)$ 416
$L_\gamma(E; F)$ 416
$L_c(E; F)$ 416
$L_b(E; F)$ 416
E'' 463
E''_b 463

E_B 460
E'_p 474
$E'_{H'}$ 597
E_U 598
$\widehat{E}_U$ 598
E_p 474
$\widehat{E}_p$ 639
$\mathcal{B}(E, F; G)$ 531
$B(E, F; G)$ 531
$\mathcal{B}(E, F)$ 531
$B(E, F)$ 531
$\mathcal{B}_\varepsilon(E'_b, F'_b; G)$ 532
$\mathcal{B}_\varepsilon(E'_\sigma, F'_\sigma; G)$ 533
$L(E'_\sigma; F'_\sigma)$ 533
$L(E'_\tau; F)$ 533
Φ_x 522

$E\otimes F$ 504

$u\otimes v$ 504

$f\otimes g$ 505

$S\otimes T$ 518

$\mathfrak{p}\otimes\mathfrak{q}$ 542

$E\otimes_\varepsilon F$ 541

$E\otimes_\pi F$ 541

$E\widehat{\otimes}_\varepsilon F$ 548

$E\widehat{\otimes}_\pi F$ 548

$u\widehat{\otimes}_\varepsilon v$ 548

$u\widehat{\otimes}_\pi v$ 548

$\|\ \ \|_\varepsilon$ 553

$\|\ \ \|_\pi$ 553

$\|\ \ \|_{\mathrm{Tr}}$ 601

$\mathrm{Tr}(\cdot)$ 608

Tr 615

$L^1(E_U;F_B)$ 600

$L^1(E;F)$ 599, 600

$J(E,F)$ 626

3. 関数と超関数の記号

$|\zeta|_p$ 74

$|\zeta|_\infty$ 74

$|\ \ |_{m,K}$ 106

ρ_ε 191

$\mathrm{supp}\,f$ 127

$\mathrm{supp}\,T$ 313

δ_x 266

$\mathrm{Re}\,\mu$ 266

$\mathrm{Im}\,\mu$ 266

μ^+ 270

μ^- 270

$|\mu|$ 270

1_K 271

$\check{f}$ 358

$\check{\phi}$ 358

$\check{T}$ 358

$f*g$ 343

$f*\mu$ 349

$T*\phi$ 354

$\phi*T$ 354

$S*T$ 361

$\tau_a f$ 364

$\tau_a T$ 364

$\hat{\phi}$ 331, 377

$\hat{f}$ 331, 377

$\mathscr{F}$ 292, 331

$\overline{\mathscr{F}}$ 331

$\mathscr{L}$ 342

$\widehat{T}$ 379, 392

$\widehat{T}(\xi)$ 379, 392

$\widehat{T}(\zeta)$ 379, 392

$\rhd$ 323

Y 341

$Y(x)$ 341

Δ 400, 408

$\langle p, u\rangle$ 279

$\hat{\mu}$ 290

4. 主な関数空間

$\mathbf{C}[[X]]$ 30

$\mathbf{C}[X]$ 160

$\mathcal{P}_n^m$ 160, 278
$\mathcal{P}_n$ 278
$\mathcal{Q}_n$ 278
$\mathcal{C}^k$ 106
$\mathcal{C}^k(\Omega)$ 106
$\mathcal{C}^\infty$ 106
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 106
$\mathcal{C}_c^\infty(K)$ 115
$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ 121
$\mathcal{C}_c^k(K)$ 162
$\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ 163
$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ 163
$\mathcal{C}^k(Y; E)$ 512
$\mathcal{C}_c^k(Y; E)$ 512
$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^t$ 661
$\mathcal{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ 135

l^p 124
$\mathcal{F}^p$ 124
$\mathcal{L}^p$ 124
$\mathcal{L}^p(X)$ 128
$\mathcal{L}^p(X, dx)$ 128
L^p 124
$L^p(\mathbf{R}^n)$ 124
$L^p(X)$ 128, 129
$L^p(X, dx)$ 128, 129
$L^p(\Omega)$ 257
$\mathcal{F}^\alpha(E)$ 585
$\mathcal{L}^\alpha(E)$ 585
$L^\alpha(E)$ 585
L^2 151
$l^2(S)$ 150
l^∞ 135
$\mathcal{L}^\infty$ 129
L^∞ 129
l_∞ 135
$\mathcal{B}^\infty$ 587
B^∞ 587
$L_c^p(\Omega)$ 163
s 660
$\mathcal{S}$ 113, 330
$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ 113, 330
$\mathcal{O}_M$ 339
$H(\Omega)$ 110, 187, 283
$H(\mathbf{C}^n)$ 187
$\mathrm{Exp}(X)$ 284
$\bar{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(X)$ 285
Exp 291

5. 主な超関数の空間

$\mathcal{D}'(\Omega)$ 276
$\mathcal{E}'(\Omega)$ 314
$\mathcal{D}'^m(\Omega)$ 318
$\mathcal{D}'^F(\Omega)$ 318
$\mathcal{E}_0'$ 326
$\mathcal{E}_0'^m$ 326
$\mathcal{S}'$ 335
$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ 335
$\mathcal{O}_C'$ 389
H' 283, 328
$H'(\mathbf{C}^n)$ 283, 328

$H^{p,m}(\Omega)$ 398
$H_0^{p,m}(\Omega)$ 399
$H^{p,-m}(\Omega)$ 400
H^s 406
$H^s(\mathbf{R}^n)$ 406
$H_{\mathrm{loc}}^{p,m}(\Omega)$ 409
$H_c^{p,m}(\Omega)$ 409
H_c^s 410
H_{loc}^s 410
$H_c^s(\Omega)$ 410
$H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ 410

Sobolev 空間のノルムと内積

$\| \ \|_{p,m}$ 398
$(\ , \ )_m$ 399
$\| \ \|_{p,-m}$ 402
$\| \ \|_s$ 406
$(\ , \ )_s$ 406
作用素 U_s 407

事 項 索 引

ア

R-線形形式……234
R-線形構造……234
Ascoli の定理……176
アフィン写像……209
アフィン多様体……223
アフィン超平面……222
Arzèla の定理……179
安定性……643
ε-位相……533, 541
位相……8
——環……32
——空間……6
——的双対……43
——的直和……44, 103, 645
——的補空間……44, 556, 681
——ベクトル空間……25
一点コンパクト化……689
一点の近傍……9
1 の分割……202
一様構造……176
一様収束の位相……120
一様に同等連続……175
一様連続……47
一様有界の原理……413
イデアル……31, 366
上への……14
ウルトラフィルター……67
Egoroff の定理……126
$\mathfrak{S}$-位相……241, 415
$\mathfrak{S}$-$\mathfrak{H}$-準連続性……528
$\mathfrak{S}$ に属する各集合上の一様収束位相……242
F-空間……104
n-系 (n-tuple)……105
n-系の長さ……106
LF-空間……155
エルミート形式……75, 138
エルミート・ノルム……74
横断面……588
Osgood の定理……413, 434

カ

回帰的……463
開写像……204
——定理……204
開集合……9
解析関数……520
解析的……682
解析的汎関数……283
——の合成積……396
開多重円板……187, 284
開単位球……76
回転に関して不変……191
解の存在定理……486
開被覆……198
可逆……366
可逆元……31
核……19
核型空間……639
核型写像……599, 600
拡張可能……302
各点収束の位相……35, 242, 416
下限位相……698
可積分階段関数……122, 585
可積分関数……124
可積分集合……122
可総和または総和可能 (summable)……569
可測……125
可ノルム空間 (normable space)……116
可分 (separable)……136, 154, 689
関数のテンソル積……505

完全連続 ……605
緩増大数列 ……661
緩増大超関数 (tempered distribution または temperate distribution) …335
完備……47
——化 ……5, 47, 50, 120
擬関数 (pseudofuncfion) ……275
帰納極限 ……644
希薄な集合 (rare set)……694
基本核 ……670
基本近傍系 ……9
逆元……30, 366
逆像……12
急減少 $\mathcal{E}^\infty$ 関数 ……115
急減少数列 ……660
吸収的……26
求値写像 (evaluation mapping) …446, 554
強位相 ……243
共役 ……309, 610
狭義帰納極限 ……155
共終 (cofinal) ……237
強収束 ……243
強正則核 ……671
強双対位相 ……243
極 (polar) ……239
極限の一意性……37
極集合 ……238
局所可積分関数 ……259, 271
局所コンパクト……99
——TVS ……99
局所凸的直和 ……645
局所有限 ……199
——開被覆 ……199
極大元……67
極大フィルター……67
距離……87
——TVS (metric TVS) ……46
距離付け可能 (metrizable) ……87
——な空間……87
切り落し (cutting) ……374
近傍フィルター ……9
空間 L^p ……124
空間 L^∞ ……129
空間列の補間 ……406
具体的実現 ……129
Krull 位相 ……32
K-解析的……699
形式的巾級数……30
係数の単純収束の位相……33
ゲージ (gauge) ……80
Gevrey クラス ……196, 203
元位相 (original topology)……457
原点に関する折り返し ……358
原点に台をもつ超関数 ……325
原点の近傍フィルター……25
Cauchy-Schwarz の不等式……140
Cauchy の公式……111
Cauchy フィルター ……45
Cauchy-Riemann の方程式……111, 521
Cauchy 列 ……45
合成……21
合成積 ……343, 354, 361, 396
——代数 ……346
固有空間 ……615
固有値 ……615
——の重複度 ……615
コンパクト ……605
——集合……60
——集合上の一様収束の位相 ……107
——収束の位相 ……416
——な台をもつ超関数 ……314

サ

座標空間への射影……23
3 ε の論法……108
三角不等式……87
$\mathcal{E}^k$ 位相……107, 512
$\mathcal{E}^k$ 関数……106
C-線形形式 ……235
C-線形構造 ……234
始位相 (initial topology)……458
σ-コンパクト ……689
σ-代数 ……689
σ-有限 ……122

次元……96
自己共役……610
指示関数……380
支持されている……290
指数型……284
実解析的……682
実現……317
実部と虚部(測度の)……266
自明位相……10
自明な拡張……301
射影……103
——位相……541
——極限……644
——的極限……35
弱位相……242
弱双対位相……242
弱連続……567
写像のグラフ……205
集積点……63
従属する……202
周期的 $\mathscr{C}^\infty$ 関数……661
周期領域……661
縮小写像……249
集合への距離……95
Šmulian の定理……566
Schwartz の核定理……665
Schwarz の不等式……140
準完備……437
順序関係……15, 16, 236
準全的……415
準双線形形式……74, 137
準楕円型……671
準同形写像……240
準 Hilbert 空間……75, 141
——の積……153
——の同型写像……152
準連続……526
準有向集合……15
商位相……40
——ベクトル空間……40
商距離……95
商空間……18
商集合……19
商ノルム空間, 商ノルム……119
上界……67
上積分……122
乗法作用素……339
食有界集合 (bornivore)……425
真に分離される……231
真のイデアル……31
錐……225, 236, 239
推移的……16
数列空間 l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$……124
スカラ乗法……18
スカラー的に k 回連続的微分可能……469
スカラー的に可測……589
スカラ的に正則……469
スカラー的に連続……469
スカラー倍……18
Stirling の公式……286
スペクトル分解……615
整関数……187
正規……374
——直交 (orthonormal)……149
——直交基底……149
——でない超関数空間……375
制限写像……220, 301
整合……24, 459
正斉次……74
正作用素……610
正射影……145
正線形形式……237
正則化……374
——核……667
正規核……671
正則関数……110
正定値……75
——形式……139
正の測度……122
正平方根……612
正 Radon 測度……258
積位相……15, 24
積分型形式……626
積分型写像……630

絶対可総和または絶対的に総和可能 ……574
絶対収束級数 ……574
絶対値 ……613
——の最大値 ……120
セミノルム ……73
——の核 ……83
——のテンソル積 ……542
零因子 ……396
尖または尖出 (salient) ……236, 366
線形形式 ……21
——のノルム ……132
線形構造と整合する順序関係 ……236
線形写像のノルム ……132
線形多様体 ……19
線形等距離写像 ……119, 152
線形汎関数 ……21
線形無関連 (または，線形距離別) ……500
全射 ……22
——的 ……22
全順序 ……237
——部分族 ……67
Souslin 空間 ……689
双線形 ……138
——写像 ……522
双対 ……43
——基底 ……329
双対空間の単射 ……298
相対コンパクト ……66
双対性 ……294
——の括弧式 ……279, 292, 528
素和 (disjoint union) ……35
総和可能列 ……569
像 ……12, 19
測度の絶対値 ……270
Sobolev 空間 ……397

タ

対角線 ……670
対称差 ……695
台 ……127, 313
代数 ……30
代数的双対 ……21
代数的転置 ……21
代数的補空間 ……44
多重核型 ……646
多重円板 ……111
樽 ……72, 427
樽型空間 ……427
単位元 ……30
単射 ……22
——的 ……22
単調増大 ……250
Dunford-Pettis の定理 ……590
Tychonov の定理 ……69, 422
超関数 ……163, 272
——に対する Fubini の定理 ……518
——の位数 ……318
——の延長 (可能性) ……303
——の空間 ……299
——の台 ……313
——の平行移動 ……364
——と関数の乗法 ……307
頂点付き ……236
超平面 ……100
稠密 ……9
直径 ……46
直交 ……147, 240
直線 ……101
直和 ……23, 100
——位相 ……645
Zorn の補題 ……67, 224
定義関数 ……122
定義列 ……155
TVS ……25
——構造の準同形 ……42
——構造の同型写像 ……42
D-凸 ……487
Dirac 測度 ……265
テスト関数 ……163
——の空間 ……161
点 x における値 ……245
テンソル積 ……500, 518
転置 ……244, 294
——写像 ……228, 244

等距離写像 ……119
同相写像……39
同値 ……117
——関係……18
——類……19
同等連続 ……175, 417
特性関数 ……271
凸……71
——コンパクト収束の位相 ……416
凸包……71
Dvoretzky-Rogers の定理 ……584
トレース (trace) ……615
——形式 ……608
——ノルム ……599, 601

ナ

内積 ……137
内部 ……9
軟化作用素 ……385
のみ込まれる ……167
ノルム……74
——空間 ……118
——空間の同型写像 ……119, 152

ハ

Hahn-Banach の定理 ……220
Parseval の等式 ……150
π-位相 ……541
陪極 ……448
陪双対 ……463
陪転置 ……632
Hausdorff 位相……37
Banach 空間……119
Banach-Steinhauss の定理……429
Banach の定理……204
Parseval の公式 ……334
パラメトリックス ……671
半回帰的 ……463
半空間 ……230
反射的 ……15, 16
半正則 ……666
半線形 ……138
反双対 ……142
半大域的に可解 ……487
B-空間……119
比較可能……11
非退化形式 ……138
非負……75
——定値形式 ……139
——定符号 ……610
微分可能 ……512
微分作用素 ……303
——の階数 ……106, 304
——の形式的転置 ……306
微分多項式 ……307, 309
標準的 LF 位相……163
標準的延長 ……401
標準的等距離写像 ……402
Hilbert 空間……141
Hilbert ノルム ……141
Hilbert 直和……149
Hilbert 和……149
Fisher-Riesz の定理 ……124
フィルター ……6
——基底 ……7
——の比較 ……8
Fourier 展開……662
Fourier 変換……290, 330, 340, 669
Fourier-Borel 変換 ……521
Fourier-Laplace 変換 ……290
複素共役 ……266
複素的可微分関数 ……520
付随したノルム空間……83
付随する Hausdorff 位相ベクトル空間 …41
付随フィルター ……7
普遍性 ……501
Plancherel-Parseval の定理 ……333
Plancherel の公式 ……334
Frèchet 空間……105
プレコンパクト……66
分離 ……226
——される ……231
——連続 ……362, 437, 522
閉グラフ定理 ……206

平衡……26
平行移動……364
——で不変……87, 210
——に関して不変……25
平衡凸包……85
平衡包……70
閉集合……9
平滑化……374
閉単位球……76
閉凸包……72
閉凸尖錐……366
閉包……9
ベクトル加法……17
ベクトル空間……17
——のテンソル積……500
Bessel の不等式……150
Heaviside 関数……342, 366
Paley-Wiener の定理……377
Baire の空間……92, 428
Baire 閉包……693
Hölder の不等式……252
膨張……26
補空間……149
ほとんどいたるところ……125, 274, 594
ポーランド空間……689
ポーランド的……689
Borel グラフ定理……688
Borel 集合……688
Borel 集合体……689
Borel の定理……485
Borel Lebesgue-Heine の定理……62
本質的上限……130

マ

Mackey 位相……459
Mackeyの定理……461
Martineau の定理……699
右逆写像……588
密度……265
Minkowski の不等式……121
無限遠において緩増大な $\mathcal{C}^{\infty}$ 関数……339
無限遠において急減少な超関数……389
無限遠において同等減少……563
無限遠で可算的……689
無限遠で急速に減少する $\mathcal{C}^{\infty}$ 関数……115
無限次元……96
無条件収束級数……570
持上げ……100
——写像……588
Montel 空間……440
Montel の定理……183

ヤ

有界写像……424
有界集合……167, 443, 444
有界収束の位相……243, 416
有界線形写像……174
有限位数の超関数……318
有限次元 Hausdorff TVS……97
有限 Taylor 展開……187, 287
有限余次元……100
ユークリッド・ノルム……74
余次元……100
より細かい (finer)……199
より強いノルム……117

ラ

Leibniz……349
Radon 正測度……266
Radon 測度……259, 264
Radon-Nicodym の定理……259
ラプラシアン (Laplacian)……400
Laplace 作用素……400
Laplace 変換……342
Runge 領域……187
Riemann 式積分……344
リーマン和……15
Riesz の定理……99
離散位相……10
両側基本核……673
Lebesgue 測度……265
Lebesgue の上積分……251
劣加法的……74
劣完備……47, 91, 597

列的に稠密 ……………………………………374
列的に同等連続 ……………………………435
列的に連続……………………………………94
連続……………………………………………12
連続セミノルムの基底………………………78
連続線形形式…………………………………43
連続線形写像…………………………………41
連続線形汎関数………………………………43
連続反線形形式 ……………………………143
連続右逆写像 ………………………………681

ワ

Weierstrass-Bolzano の定理………………63

ISBN4-0002-5

位相ベクトル空間・超関数・核(下)

1976年2月25日 第1刷発行
1986年10月25日 第2刷発行

訳 者 松浦(まつうら) 重武(しげたけ)

発行者 吉 岡 誠

京都市左京区田中門前町87
発行所 株式会社 吉 岡 書 店
電話(075)781—4747/振替京都3-4624

組版/宮崎印刷・印刷/一進印刷・製本/池田製本

ISBN4-8427-0178-1